Abschlussprüfung 2016
an den Realschulen in Bayern

Mathematik II Haupttermin

Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 09.06.2017

Aufgabe A1

A 1.1

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3500 \cdot 0{,}85^x$ | 3500 | 2975 | 2529 | 2149 | 1827 | 1553 | 1320 | 1122 | 954 |


A 1.2

3500 € - 2149 € = 1351 €

A 1.3

Nach etwas mehr als 4 Jahren.

Zweig I:

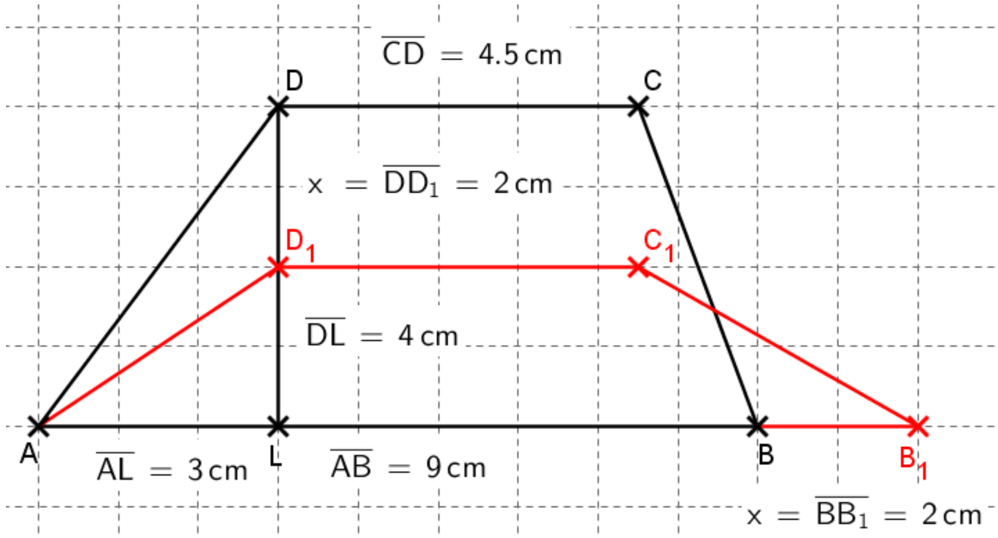
$1750\text{ €} = 3500\text{ €} \cdot 0{,}85^x$

$\Leftrightarrow 0{,}5 = 0{,}85^x$

$\Leftrightarrow x = \log_{0{,}85} 0{,}5 = 4{,}27 \quad \mathbb{L} = \{4{,}27\}$

Aufgabe A2

A 2.1 und 2.2




Dreieck ALD:

$$\tan \sphericalangle ADL = \frac{\overline{AL}}{\overline{DL}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sphericalangle ADL = 36{,}87°$$

Somit ist $\sphericalangle ADC = 90° + 36{,}87° = 126{,}87°$

A 2.3

Die Punkte $D_n$ sind immer 3 cm weiter rechts als A. Somit muss der Punkt $B_2$ 3 cm weiter rechts als $C_2$ sein.

3 cm + 4,5 cm + 3 cm = 10,5 cm

Da $\overline{AB}$ = 9 cm fest ist, muss $\overline{BB_2}$ = x = 1,5 sein.

A 2.4

$$A(x) = 0{,}5(\overline{AB_n} + \overline{CD}) \cdot \overline{LD_n}$$

$$\Leftrightarrow A(x) = 0{,}5(9 + x + 4{,}5) \cdot (4 - x)\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow A(x) = 0{,}5(13{,}5 + x)(4 - x)\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow A(x) = 0{,}5(54 - 13{,}5x + 4x - x^2)\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow A(x) = 0{,}5(-x^2 - 9{,}5x + 54)\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow A(x) = (-0{,}5x^2 - 4{,}75x + 27)\ cm^2$$

A 2.5

Interessante Aufgabe, da man es eigentlich gewohnt ist, dass man hier eine negative Diskriminante findet und es so keine Lösung gibt. Hier gibt es zur Abwechslung mal zwei Lösungen, die aber beide für 0 < x < 4 nicht funktionieren:

$$28\ cm^2 = (-0{,}5x^2 - 4{,}75x + 27)\ cm^2$$

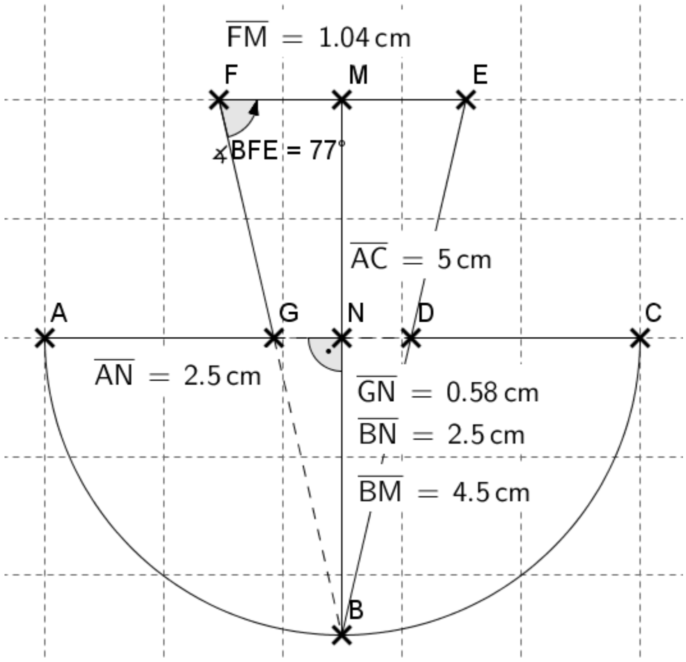
$$\Leftrightarrow -0{,}5x^2 - 4{,}75x - 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{4{,}75 \pm \sqrt{(-4{,}75)^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-1)}}{-1} = \frac{4{,}75 \pm \sqrt{20{,}5625}}{-1}$$

$$\Rightarrow x_1 = -9{,}28 \text{ und } x_2 = -0{,}22 \qquad \mathbb{L} = \emptyset \text{ da } 0 < x < 4$$

Aufgabe A3

A 3.1




Wenn man durchblickt… dann ist es Standard ☺

Dreieck BMF:

$$\tan \sphericalangle BFE = \frac{\overline{BM}}{\overline{FM}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{FM} = \frac{\overline{BM}}{\tan \sphericalangle BFE} = \frac{4{,}5\ cm}{\tan 77°} = 1{,}04\ cm$$

Vierstreckensatz im Dreieck BMF [Zentrum: B]:

$$\frac{\overline{GN}}{\overline{FM}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BM}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{GN} = \frac{\overline{BN} \cdot \overline{FM}}{\overline{BM}} = \frac{2{,}5\ cm \cdot 1{,}04\ cm}{4{,}5\ cm} = 0{,}58\ cm$$

A 3.2

$$V = V_{Halbkugel} + V_{ganzerKegelBEF} - V_{fehlenderKegelBDG}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} \cdot \overline{AN}^3 \cdot \pi + \frac{1}{3}\cdot\pi \cdot \overline{FM}^2 \cdot \overline{BM} - \frac{1}{3}\cdot\pi \cdot \overline{GN}^2 \cdot \overline{BN}$$

$$\Leftrightarrow V = (\frac{4}{6} \cdot 2{,}5^3 \cdot \pi + \frac{1}{3}\cdot\pi \cdot 1{,}04^2 \cdot 4{,}5 - \frac{1}{3}\cdot\pi \cdot 0{,}58^2\cdot 2{,}5)cm^3$$

$$\Leftrightarrow V = 36{,}94\ cm^3$$

Aufgabe B1

B 1.1 und B 1.2

**g: y = 0,5x + 2** **p: y = 0,25x² - 2x + 2**

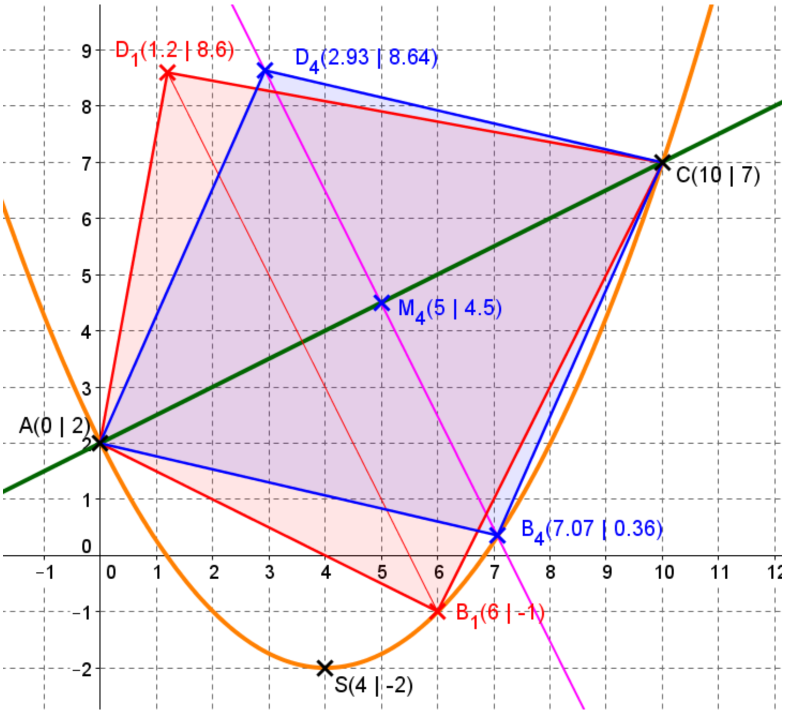
Scheitelform mit a = 0,25 und S(4 | -2):

$y = 0,25 \cdot (x - 4)^2 - 2$

$\Leftrightarrow y = 0,25 \cdot (x^2 - 8x + 16) - 2$

$\Leftrightarrow y = 0,25x^2 - 2x + 4 - 2$

$\Leftrightarrow y = 0,25x^2 - 2x + 2$ und damit **p: y = 0,25x² - 2x + 2**




Die ganze Geschichte funktioniert aus umlauftechnischen Gründen nur zwischen den Schnittpunkten, also: $0 < x < 10$.

B 1.3

Wir brauchen die Steigungen der Geraden $AB_1$ und $B_1C$:

$m_{AB1} = \frac{-1 - 2}{6 - 0} = -0,5$ $\qquad$ $m_{B1C} = \frac{7 - (-1)}{10 - 6} = 2$

$-0,5 \cdot 2 = -1 \Rightarrow$ sie stehen aufeinander senkrecht und somit ist dort auch ein rechter Winkel!

Andere Möglichkeit: Berechnung aller Strecken im Dreieck $AB_1C$ und dann mit einer Rechnung testen, ob Pythagoras, der nur in rechtwinkligen Dreiecken klappt, funktioniert:

$\overline{AC} = \sqrt{125}$ cm = 11,18 cm; $\overline{AB_1} = \sqrt{45}$ cm = 6,71 cm;

$\overline{B_1C} = \sqrt{80}$ cm = 8,94 cm

$\sqrt{45}^2 + \sqrt{80}^2 = \sqrt{125}^2$ ✓

B 1.4
Wenn die Punkte auf der x-Achse liegen, dann ist der y-Wert gleich 0.

Also:

$$0 = 0{,}25x^2 - 2x + 2$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot 2}}{0{,}5} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{0{,}5}$$

$\Rightarrow x_1 = 6{,}83$ und $x_2 = 1{,}17$ $\mathbb{L} = \{1{,}17;\ 6{,}83\}$
Damit ist $B_2(1{,}17 \mid 0)$ und $B_3(6{,}83 \mid 0)$.

B 1.5

$$\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} x - 0 \\ 0{,}25x^2 - 2x + 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0{,}25x^2 - 2x \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 - 0 \\ 7 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Da es zwei gleich große Teildreiecke gibt … alles „mal 2“:

$$A(x) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \begin{vmatrix} x & 10 \\ 0{,}25x^2 - 2x & 5 \end{vmatrix} \text{ FE}$$

$\Leftrightarrow A(x) = (5x - 2{,}5x^2 + 20x)$ FE
$\Leftrightarrow A(x) = (-2{,}5x^2 + 25x)$ FE

B 1.6
Der Punkt M halbiert die Strecke [AC]:

$M\left(\frac{0 + 10}{2} \mid \frac{2 + 7}{2}\right)$ und damit $M(5 \mid 4{,}5)$

Die Gerade $MB_4$ steht senkrecht auf AC.

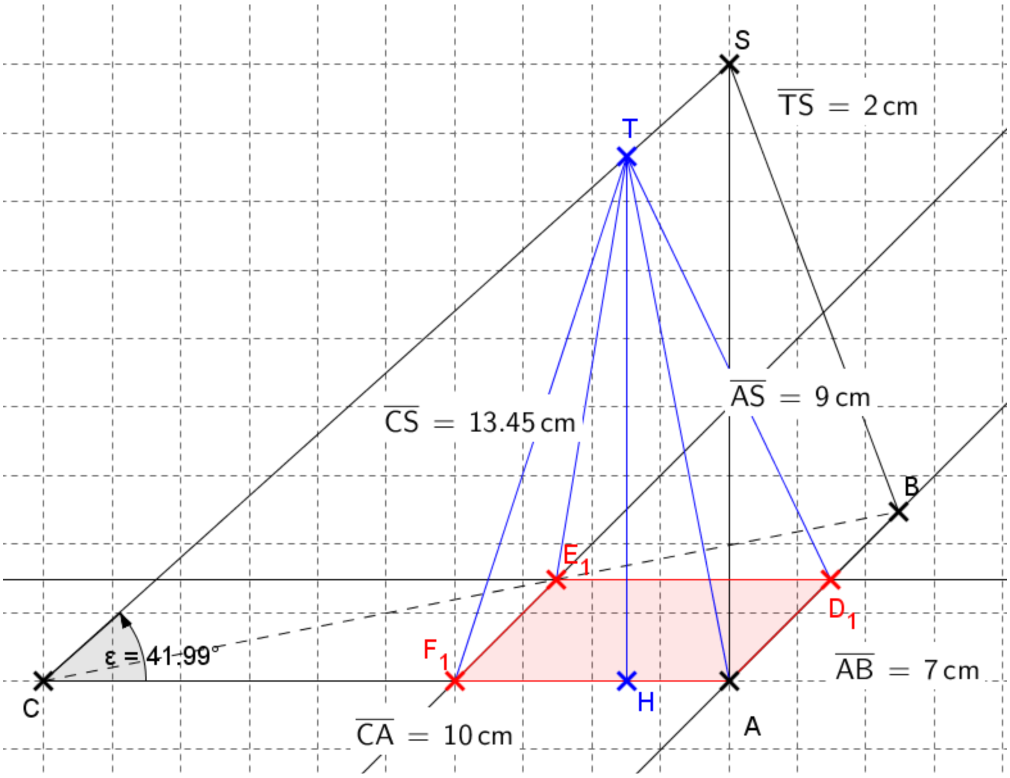
$m_{AC} = \frac{7 - 2}{10 - 0} = 0{,}5$ und damit $m_{MB4} = -2$ da $0{,}5 \cdot (-2) = -1$

PSF: $4{,}5 = -2 \cdot 5 + t$
$\Leftrightarrow t = 14{,}5$

Und damit ist die Gerade $MB_4$: **h: y = -2x + 14,5**

(nur zur Veranschaulichung mit eingezeichnet)

Aufgabe B2 [interessant, da ungewöhnliche Schrägbildachse]
B 2.1




$\overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AS}^2$

$\Leftrightarrow \overline{CS}^2 = (10\text{ cm})^2 + (9\text{ cm})^2 = 181\text{ cm}^2$

$\Leftrightarrow \overline{CS} = 13{,}45\text{ cm}$ [im Zweig I identische Lösung ☺]

$\tan \varepsilon = \dfrac{\overline{AS}}{\overline{AC}} = \dfrac{9\text{ cm}}{10\text{ cm}} \Rightarrow \varepsilon = 41{,}99°$

B 2.2
Zeichnung über parallele Geraden, die in der Zeichnung zu sehen sind.

Vierstreckensatz im Bereich ABC [Zentrum: C]:

$$\frac{\overline{E_nF_n}(x)}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CF_n}(x)}{\overline{CA}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{E_nF_n}(x) = \frac{\overline{CF_n}(x)\cdot\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{(10 - x)\cdot 7}{10}\text{ cm} = (-0{,}7x + 7)\text{ cm}$$

Ein Quadrat entsteht genau dann, wenn die Länge von $[E_nF_n]$ genau x beträgt. Also:

$x = -0{,}7x + 7$
$\Leftrightarrow 1{,}7x = 7$
$\Leftrightarrow x = 4{,}12 \quad \mathbb{L} = \{4{,}12\}$

B 2.3

$$A(x) = x \cdot (-0{,}7x + 7)\ cm^2$$
$$\Leftrightarrow A(x) = (-0{,}7x^2 + 7x)\ cm^2$$

Jetzt quadratisch ergänzen:

$$A(x) = -0{,}7 \cdot (x^2 - 10x)\ cm^2$$
$$\Leftrightarrow A(x) = -0{,}7 \cdot (x^2 - 10x + 5^2 - 5^2)\ cm^2$$
$$\Leftrightarrow A(x) = (-0{,}7 \cdot (x - 5)^2 + 17{,}5)\ cm^2$$

Damit entsteht $A_{max}$ für $x = 5$. $A_{max} = 17{,}5\ cm^2$, aber das ist gar nicht verlangt. Das hatte der Aufgabensteller evtl. erst drin, und dann hatte er zu viele Punkte und musste was streichen…

B 2.4

Die Höhe ist im Bild ganz vorne!

$$\overline{CT} = \overline{CS} - \overline{TS} = 13{,}45\ cm - 2\ cm = 11{,}45\ cm$$

Dreieck $CH_1T$:

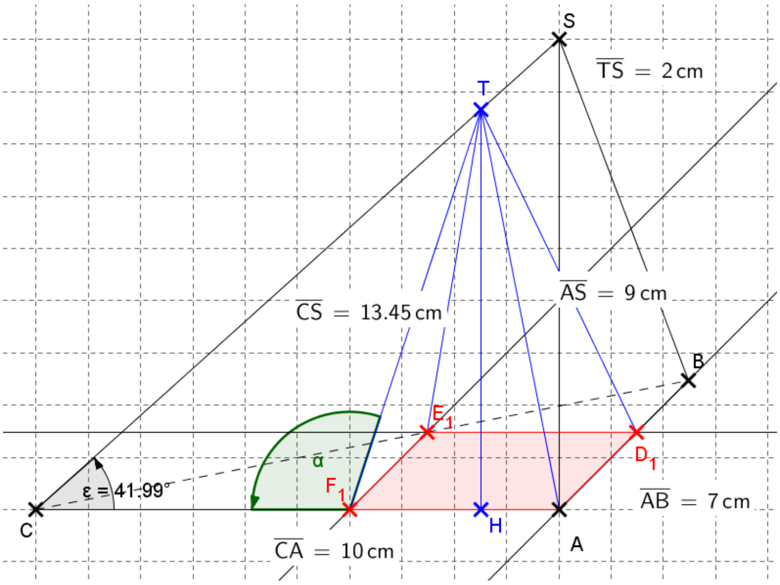
$$\sin \varepsilon = \frac{h}{\overline{CT}}$$

$$\Leftrightarrow h = \sin \varepsilon \cdot \overline{CT} = \sin 41{,}99° \cdot 11{,}45\ cm = 7{,}66\ cm$$

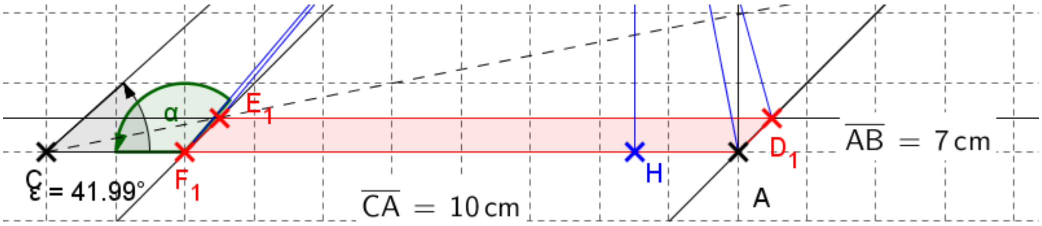
B 2.5

Und nun „das große Finale“! Hier darf ein wenig geknobelt werden!

Zeichnen wir mal den $\alpha$ = ∢$TF_1C$ ein:

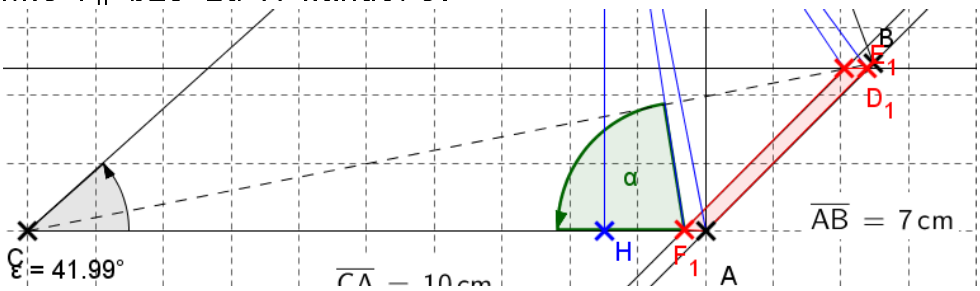



Der grüne Winkel wird größer, wenn das x größer wird, also der Punkt $F_n$ bis zu C wandert.




Beim Punkt C ist $\varepsilon = 41{,}99°$ im Dreieck $CF_nT$ fix, so dass der grüne Winkel definitiv kleiner als $180° - 41{,}99° = 138{,}01°$ sein muss. Also: $\alpha < 138{,}01°$

Der grüne Winkel wird kleiner, wenn das x kleiner wird, also der Punkt $F_n$ bis zu A wandert.




Jetzt muss „nur“ noch der grüne Winkel im Dreieck HAT berechnet werden.

Kleine Vorarbeit:

$$\overline{AT}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CT}^2 - 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CT} \cdot \cos \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \overline{AT}^2 = (10^2 + 11{,}45^2 - 2 \cdot 10 \cdot 11{,}45 \cdot \cos 41{,}99)\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AT}^2 = 60{,}90\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AT} = 7{,}80\ cm^2$$

Dreieck HAT:

$$\sin \alpha = \frac{h}{\overline{AT}} = \frac{7{,}66\ cm}{7{,}80\ cm} = 0{,}98 \Rightarrow \alpha = 79{,}13°$$

Damit gilt: $79{,}13° < \alpha < 138{,}01°$