Abschlussprüfung 2010
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Nachtermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 09.06.2017

Aufgabe A1

1.1

Dreieck ABS:

$\overline{AS} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BS}^2}\ \text{cm} = \sqrt{6^2 + 3^2}\ \text{cm} = \sqrt{45}\ \text{cm} = 6{,}71\ \text{cm}$

Dreieck ASE:

$\overline{ES} = \sqrt{\overline{AS}^2 + \overline{AE}^2}\ \text{cm} = \sqrt{\sqrt{45}^2 + 6^2}\ \text{cm} = \sqrt{81}\ \text{cm} = 9\ \text{cm}$

Kosinus-Satz im Dreieck ESH:

$\overline{EH}^2 = \overline{ES}^2 + \overline{HS}^2 - 2\cdot\overline{ES}\cdot\overline{HS}\cdot\cos\alpha$

$\Leftrightarrow\quad \cos\alpha = \dfrac{\overline{EH}^2 - \overline{ES}^2 - \overline{HS}^2}{-2\cdot\overline{ES}\cdot\overline{HS}}$

$\Leftrightarrow\quad \cos\alpha = \dfrac{6^2 - 9^2 - 9^2}{-2\cdot 9\cdot 9} = 0{,}78 \Leftrightarrow \alpha = 38{,}94°$

1.2

$V_{Würfel} = \overline{AB}^2 = (6\ \text{cm})^3 = 216\ \text{cm}^3$

$V_{Pyramide} = \dfrac{1}{3}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{AB}$

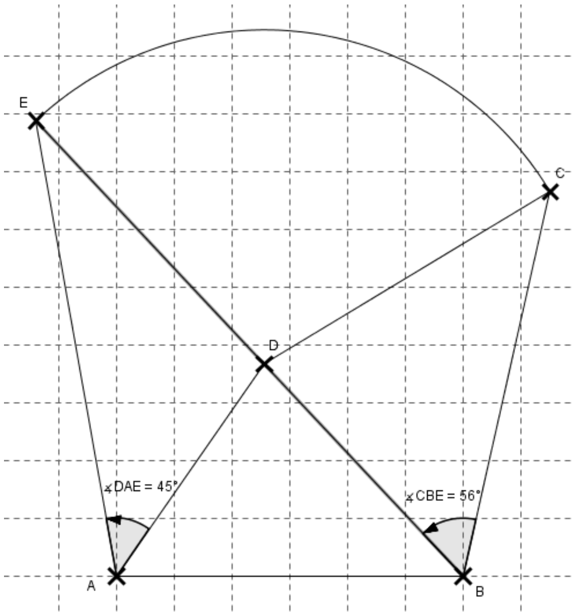
$\Leftrightarrow\quad V_{Pyramide} = \dfrac{1}{3}\cdot 6\cdot 6\cdot 6\ \text{cm}^3 = 72\ \text{cm}^3$

216 – 72 = 144

144 : 72 = 2 $\Rightarrow$ 200 %

Aufgabe A2

2.1



Kosinus-Satz im Dreieck ABE:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 - 2\cdot\overline{AE}\cdot\overline{BE}\cdot\cos\sphericalangle AEB$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\sphericalangle AEB = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2}{-2\cdot\overline{AE}\cdot\overline{BE}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\sphericalangle AEB = \frac{6^2 - 8^2 - 10{,}8^2}{-2\cdot 8\cdot 10{,}8} = 0{,}84 \Leftrightarrow \sphericalangle AEB = 33{,}17°$$

$\sphericalangle EDA = 180° - \sphericalangle DAE - \sphericalangle AED = 180° - 45° - 33{,}17° = 101{,}83°$

Sinus-Satz im Dreieck ADE:

$$\frac{\overline{DE}}{\sin\sphericalangle DAE} = \frac{\overline{AE}}{\sin\sphericalangle EDA}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{\overline{AE}\cdot\sin\sphericalangle DAE}{\sin\sphericalangle EDA}\ \text{m}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{8\cdot\sin 45°}{\sin 101{,}83°} = 5{,}78\ \text{m}$$

2.2

Sinus-Satz im Dreieck DBC:

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\sphericalangle DCB} = \frac{\overline{DC}}{\sin\sphericalangle CBE}$$

$$\Leftrightarrow \sin\sphericalangle DCB = \frac{\overline{BD}\cdot\sin\sphericalangle CBE}{\overline{DC}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\sphericalangle DCB = \frac{(10{,}8 - 5{,}78)\text{m}\cdot\sin 56°}{5{,}78\ \text{m}} = 0{,}72$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle DCB = 46{,}06°$

$\sphericalangle BDC = 180° - \sphericalangle DCB - \sphericalangle CBE = 180° - 46{,}06° - 56° = 77{,}94°$

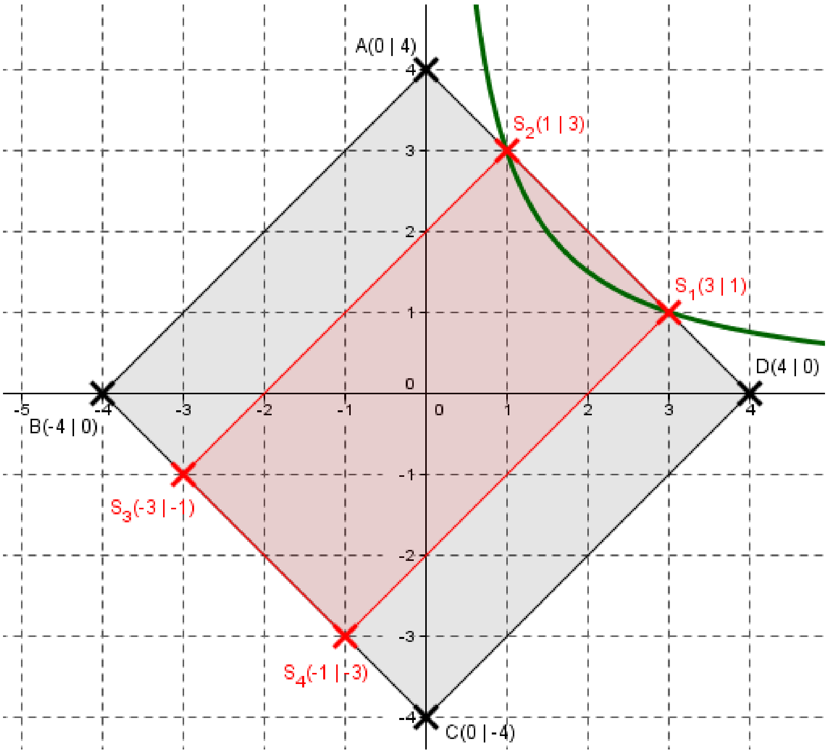
$\sphericalangle CDE = 180° - 77,94° = 102,06°$

$$A_{Sektor} = \overline{DE}^2 \cdot \pi \cdot \frac{102,06°}{360°}$$

$$\Leftrightarrow A_{Sektor} = 5,78^2 \cdot \pi \cdot \frac{102,06°}{360°} \text{ m}^2 = 29,75 \text{ m}^2$$

Aufgabe A3

3.1 $f\colon y = \frac{3}{x}$



A(0 | 4) D(4 | 0) Damit ist $m_{AD} = -1$

Punkt-Steigungsform: $y = -(x - 0) + 4 \Leftrightarrow y = -x + 4$

Also: $g\colon y = -x + 4$

$$\frac{3}{x} = -x + 4 \quad |\cdot x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 = -x^2 + 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-3)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2}$$

$\Rightarrow x_1 = 3$ und $x_2 = 1$ $\mathbb{L} = \{1; 3\}$

Damit ist $S_1(3 | 1)$ und $S_2(1 | 3)$

3.2

$$\overline{S_1S_2} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (3 - 1)^2} \text{ cm} = \sqrt{8} \text{ cm}$$

$$\overline{S_1S_4} = \overline{DC} = \sqrt{(0 - 4)^2 + (-4 - 0)^2} \text{ cm} = \sqrt{32} \text{ cm}$$

$$A_{S1S2S3S4} = \overline{S_1S_2} \cdot \overline{S_1S_4} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{32} \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2$$

Aufgabe B1

B 1.1

$$\begin{aligned}
&\text{I} \quad & 0 &= 0{,}25\cdot 2^2 + 2\cdot b + c \\
&\text{II} \quad & 0 &= 0{,}25\cdot 6^2 + 6\cdot b + c \\
\Leftrightarrow\ &\text{I} \quad & -c &= 1 + 2\cdot b \\
&\text{II} \quad & -c &= 9 + 6\cdot b
\end{aligned}$$

$$\text{I} = \text{II} \quad 1 + 2b = 9 + 6b$$

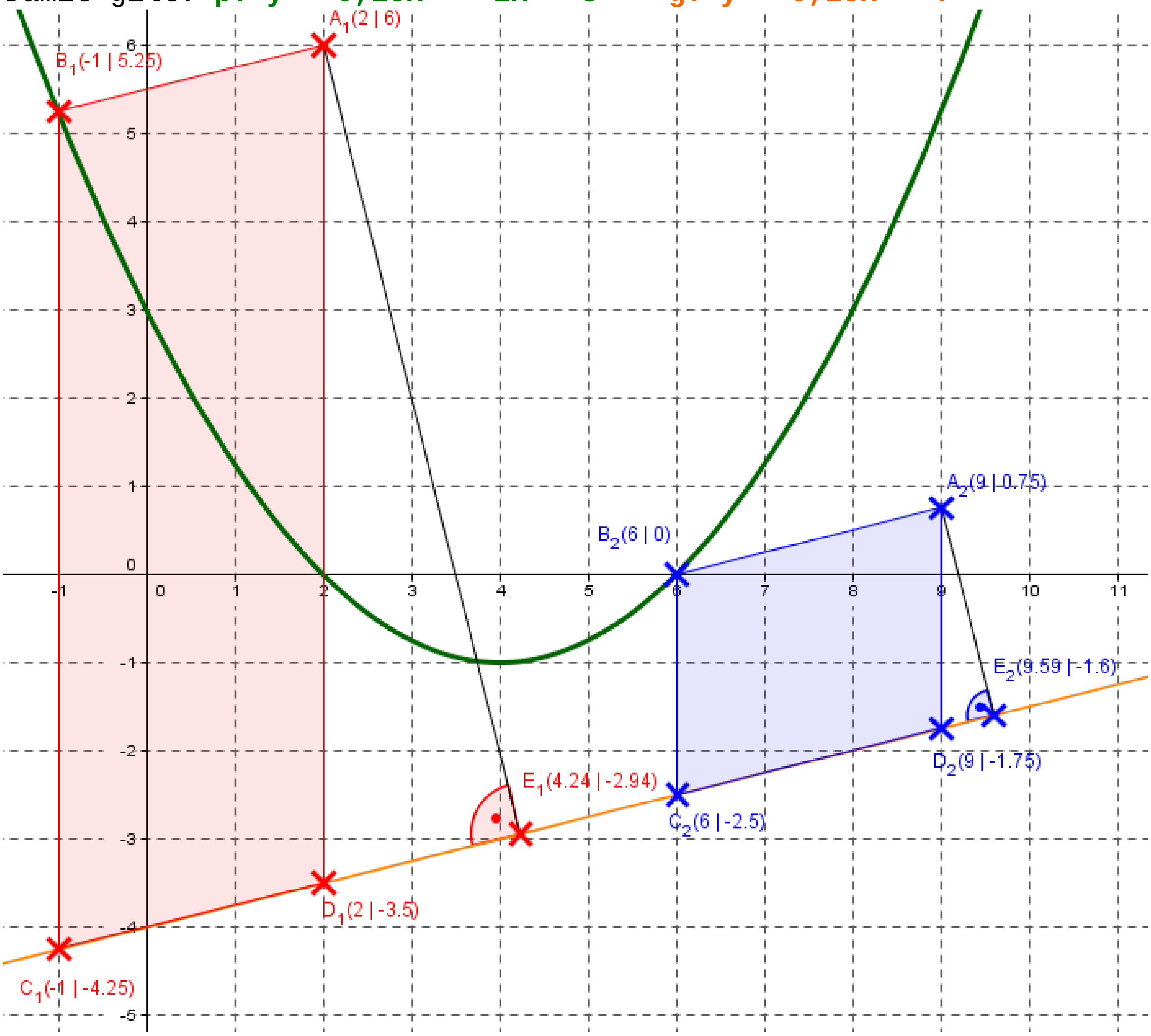
$$\Leftrightarrow \quad -8 = 4b$$

$$\Leftrightarrow \quad b = -2 \quad \text{in I}$$

$$\text{I} \quad -c = 1 + 2\cdot(-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{I} \quad c = 3$$

Damit gilt: **p: $y = 0{,}25x^2 - 2x + 3$** **g: $y = 0{,}25x - 4$**



B 1.2 Siehe Zeichnung

B 1.3

$$\overline{B_nC_n} = \sqrt{(x - x)^2 + (0{,}25x^2 - 2x + 3 - (0{,}25x - 4))^2}\ \text{LE}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{B_nC_n} = (0{,}25x^2 - 2x + 3 - 0{,}25x + 4)\ \text{LE}$$

$\Leftrightarrow \quad \overline{B_nC_n} = (0{,}25x^2 - 2{,}25x + 7)$ LE $\quad [= \overline{D_nA_n}$ für B 1.6]

Die Höhe ist jeweils 3 LE.

Also: $A(x) = 3 \cdot (0{,}25x^2 - 2{,}25x + 7)$ FE

$\Leftrightarrow \quad A(x) = (0{,}75x^2 - 6{,}75x + 21)$ FE

$\quad A_{min} = 0{,}75(x^2 - 9x) + 21$

$\Leftrightarrow \quad A_{min} = 0{,}75(x^2 - 9x + 4{,}5^2 - 4{,}5^2) + 21$

$\Leftrightarrow \quad A_{min} = 0{,}75(x - 4{,}5) + 5{,}8125$

Damit ist $A_{min} = 5{,}8125$ für $x = 4{,}5$.

B 1.4

Die Steigung der Geraden **g** ist 0,25.

$\tan \alpha = 0{,}25 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0{,}25 \quad 14{,}04°$

Somit ist $\sphericalangle D_nC_nB_n = 90° - 14{,}04° = 75{,}96°$

B 1.5 Siehe Zeichnung

B 1.6

$$\cos \sphericalangle EDA = \frac{\overline{DE}}{\overline{DA}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{DA} = \frac{\overline{DE}}{\cos \sphericalangle EDA}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}25x^2 - 2{,}25x + 7 = \frac{1}{\cos 75{,}96°}$$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}25x^2 - 2{,}25x + 7 = 4{,}12$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}25x^2 - 2{,}25x + 2{,}88 = 0$

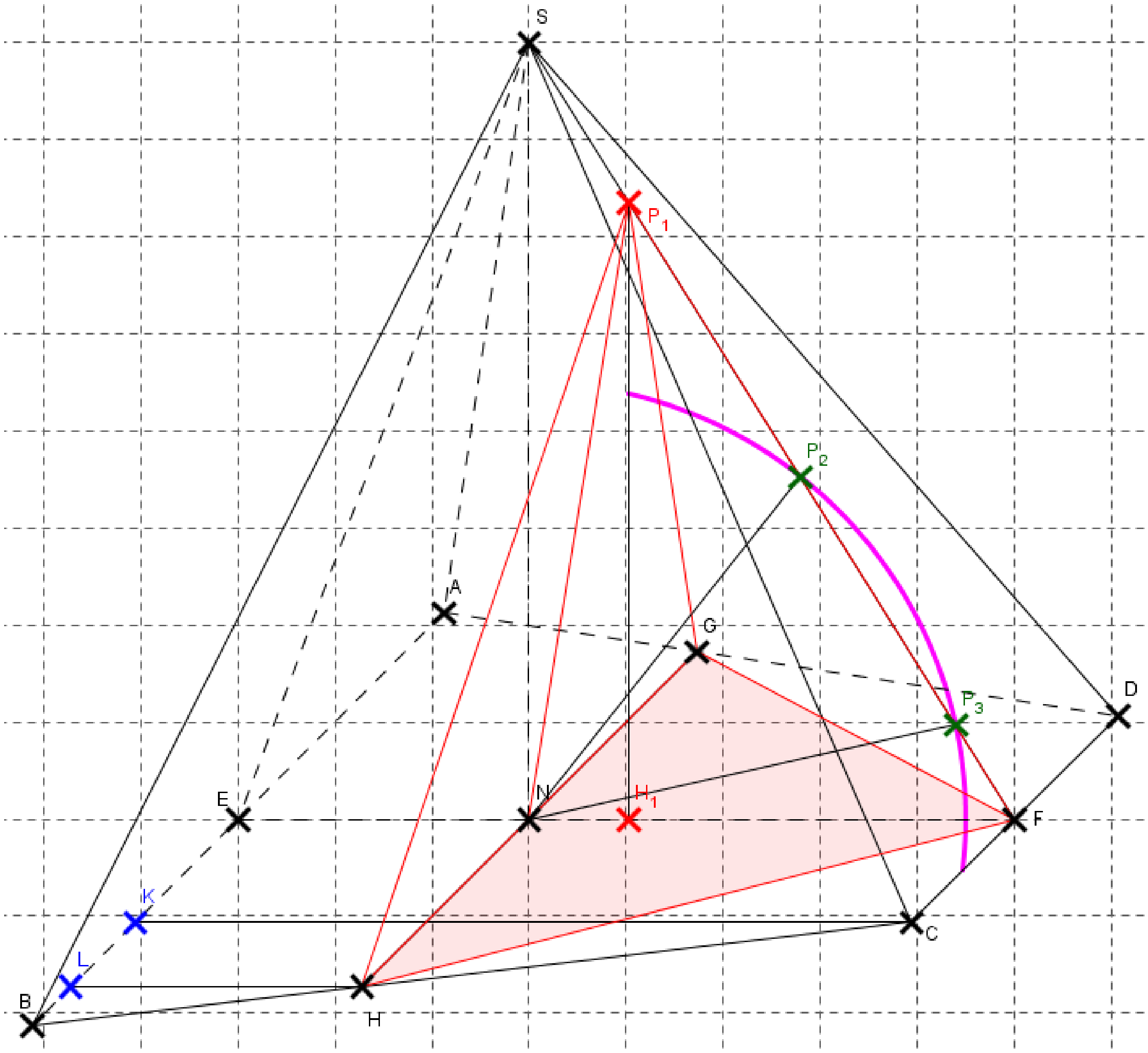
$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2{,}25 \pm \sqrt{(-2{,}25)^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot 2{,}88}}{2 \cdot 0{,}25}$$

$$= \frac{2{,}25 \pm \sqrt{2{,}1825}}{0{,}5}$$

$\Rightarrow x_1 = 7{,}45$ und $x_2 = 1{,}55 \quad \mathbb{L} = \{1{,}55;\ 7{,}45\}$

Aufgabe B2

B 2.1



$$\tan \sphericalangle SFN = \frac{\overline{SN}}{\overline{NF}} = \frac{8}{5} = 1{,}6 \quad \Leftrightarrow \sphericalangle SFN = 57{,}99°$$

$$\overline{SF} = \sqrt{\overline{SN}^2 + \overline{NF}^2}\ \text{cm} = \sqrt{8^2 + 5^2}\ \text{cm} = \sqrt{89}\ \text{cm} = 9{,}43\ \text{cm}$$

B 2.2 Trick: Zwei weitere Teildreiecke mit einbeziehen

.

Dreieck BCK:

$$\tan \sphericalangle CBK = \frac{\overline{KC}}{\overline{KB}} = \frac{8}{(12 - 6):2} = 2\frac{2}{3} \Leftrightarrow \sphericalangle CBK = 69{,}44°$$

Dreieck BHL:

$$\tan \sphericalangle HBL = \frac{\overline{LH}}{\overline{BL}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BL} = \frac{\overline{LH}}{\tan \sphericalangle HBL} = \frac{3}{\tan 69{,}44°} \text{ cm} = 1{,}13^{*} \text{ cm}$$

$$\overline{GH} = 12 \text{ cm} - 2 \cdot \overline{BL} = 12 \text{ cm} - 2 \cdot 1{,}13^{*} \text{ cm} = 9{,}75 \text{ cm}$$

* ungerundet im TR lassen

B 2.3

Kosinus-Satz im Dreieck NFP_1:

$$\overline{NP_1}^2 = \overline{NF}^2 + \overline{FP_1}^2 - 2 \cdot \overline{NF} \cdot \overline{FP_1} \cdot \cos \sphericalangle SFN$$

$$\Leftrightarrow \overline{NP_1}^2 = (5^2 + 7{,}5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7{,}5 \cdot \cos 57{,}99°) \text{ cm}^2 = 41{,}49 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{NP_1} = 6{,}44 \text{ cm}$$

$$\overline{FP_1}^2 = \overline{NF}^2 + \overline{NP_1}^2 - 2 \cdot \overline{NF} \cdot \overline{NP_1} \cdot \cos \sphericalangle FNP_1$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle FNP_1 = \frac{\overline{FP_1}^2 - \overline{NF}^2 - \overline{NP_1}^2}{-2 \cdot \overline{NF} \cdot \overline{NP_1}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle FNP_1 = \frac{7{,}5^2 - 5^2 - 41{,}49}{-2 \cdot 5 \cdot 6{,}44} = 0{,}16 \Leftrightarrow \sphericalangle FNP_1 = 80{,}85°$$

B 2.4

Dreieck NH_1P_1:

$$\sin \sphericalangle FNP_1 = \frac{\overline{P_1H_1}}{\overline{NP_1}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_1H_1} = \sin \sphericalangle FNP_1 \cdot \overline{NP_1} = \sin 80{,}85° \cdot 6{,}44 \text{ cm} = 6{,}36 \text{ cm}$$

$$V_{GHFP1} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot \overline{GH} \cdot \overline{NF} \cdot \overline{P_1H_1} \text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow V_{GHFP1} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}75 \cdot 5 \cdot 6{,}36 \text{ cm}^3 = 51{,}675 \text{ cm}^3$$

$$V_{alles} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{EF} \cdot \overline{SN} \text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow V_{alles} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot (12 + 6) \cdot 8 \cdot 8 \text{ cm}^3 = 192 \text{ cm}^3$$

$51{,}675 : 192 = 0{,}2691 \Rightarrow 26{,}91\ \%$

B 2.5

$x = 5$

Damit würde der Punkt P auf F liegen ($\overline{NF} = 5$ cm), und somit ist es keine Pyramide mehr, sondern ein einfaches Dreieck. Daher ist nur der andere Schnittpunkt möglich und es gibt nur eine Pyramide.

$x = 4{,}24$ Dreieck NFP:

$$\sin 57{,}99° = \frac{x}{\overline{NF}}$$

$\Leftrightarrow x = \sin 57{,}99° \cdot \overline{NF} = \sin 57{,}99° \cdot 5\text{ cm} = 4{,}24\text{ cm}$

Für $x = 4{,}24$ ist [NP] der Abstand von N zu [FS], daher gibt es nur einen Berührpunkt des Kreises mit $r = 4{,}24$ cm.