Abschlussprüfung 1997
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Aufgabengruppe B
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 04.09.2013

Aufgabe B1

B 1.0 $p_1: y = 0{,}25x^2 - 3{,}5x + 14$ $\quad p_2: y = x^2 - 16x + 69$

$g: y = 0{,}5x - 2$ mit B(2 | -1) und C(8 | 2)

B 1.1 Gleichsetzen: $0{,}25x^2 - 3{,}5x + 14 = 0{,}5x - 2$

$\Leftrightarrow 0{,}25x^2 - 4x + 16 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{0{,}5} = 8 \qquad \mathbb{L} = \{8\}$$

Einsetzen: $y = 0{,}5 \cdot 8 - 2 = 2$ und damit C(8 | 2) Schnittpunkt.

B 1.2

x	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
y	8,00	5,75	4,00	2,75	2,00	1,75	2,00	2,75	4,00	5,75

S von p_2:

$y = x^2 - 16x + 69$

$\Leftrightarrow y = x^2 - 16x + 8^2 - 8^2 + 69$

$\Leftrightarrow y = (x - 8)^2 + 5$

und damit $S_{p2}(8 \mid 5)$

B 1.3

$A_1(3 \mid 5{,}75)$ und $D_1(6 \mid 9)$; $A_2(4 \mid 5{,}75)$ und $D_2(8 \mid 5)$

$\sphericalangle A_2D_2C$:

$\overline{A_2C} = \sqrt{(8-4)^2 + (2-4)^2}$ LE $\Leftrightarrow \overline{A_2C} = \sqrt{20}$ LE

$\overline{D_2C} = \sqrt{0^2 + (2-5)^2}$ LE $\Leftrightarrow \overline{D_2C} = 3$ LE

$\overline{A_2D_2} = \sqrt{(8-4)^2 + (5-4)^2}$ LE $\Leftrightarrow \overline{A_2D_2} = \sqrt{17}$ LE

Kosinussatz:

$$\overline{A_2C}^2 = \overline{D_2C}^2 + \overline{A_2D_2}^2 - 2\,\overline{D_2C} \cdot \overline{A_2D_2} \cdot \cos\sphericalangle A_2D_2C$$

$$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle A_2D_2C = \frac{\overline{A_2C}^2 - \overline{D_2C}^2 - \overline{A_2D_2}^2}{-2\,\overline{D_2C} \cdot \overline{A_2D_2}}$$

$$= \frac{\sqrt{20}^2 - 3^2 - \sqrt{17}^2}{-2 \cdot 3 \cdot \sqrt{17}} = \frac{-6}{-24{,}74} = 0{,}24 \quad \Leftrightarrow \sphericalangle A_2D_2C = 75{,}96°$$

B 1.4

x-Koordiante: 2x klar aus Angabe zu 1.3

y-Koordinate: $4x^2 - 32x + 69$

2x in p_2 einsetzen:

$y = (2x)^2 - 16 \cdot 2x + 69 \Leftrightarrow y = 4x^2 - 32x + 69$

B 1.5

Punkt-Steigungs-Form der Geraden A_3D_3 bzw. A_4D_4, die die gleiche Steigung wie g hat:

a) Mit Punkt auf p_1:

$y = a(x - x_p) + y_p \Leftrightarrow y = 0{,}5(x - x) + \mathbf{0{,}25x^2 - 3{,}5x + 14}$

$\Leftrightarrow y = 0{,}25x^2 - 3{,}5x + 14$

a) Mit Punkt auf p_2:

$y = a(x - x_p) + y_p \Leftrightarrow y = 0{,}5(x - 2x) + 4x^2 - 32x + 69$

$\Leftrightarrow y = 4x^2 - 32{,}5x + 69$

Gleichsetzen:

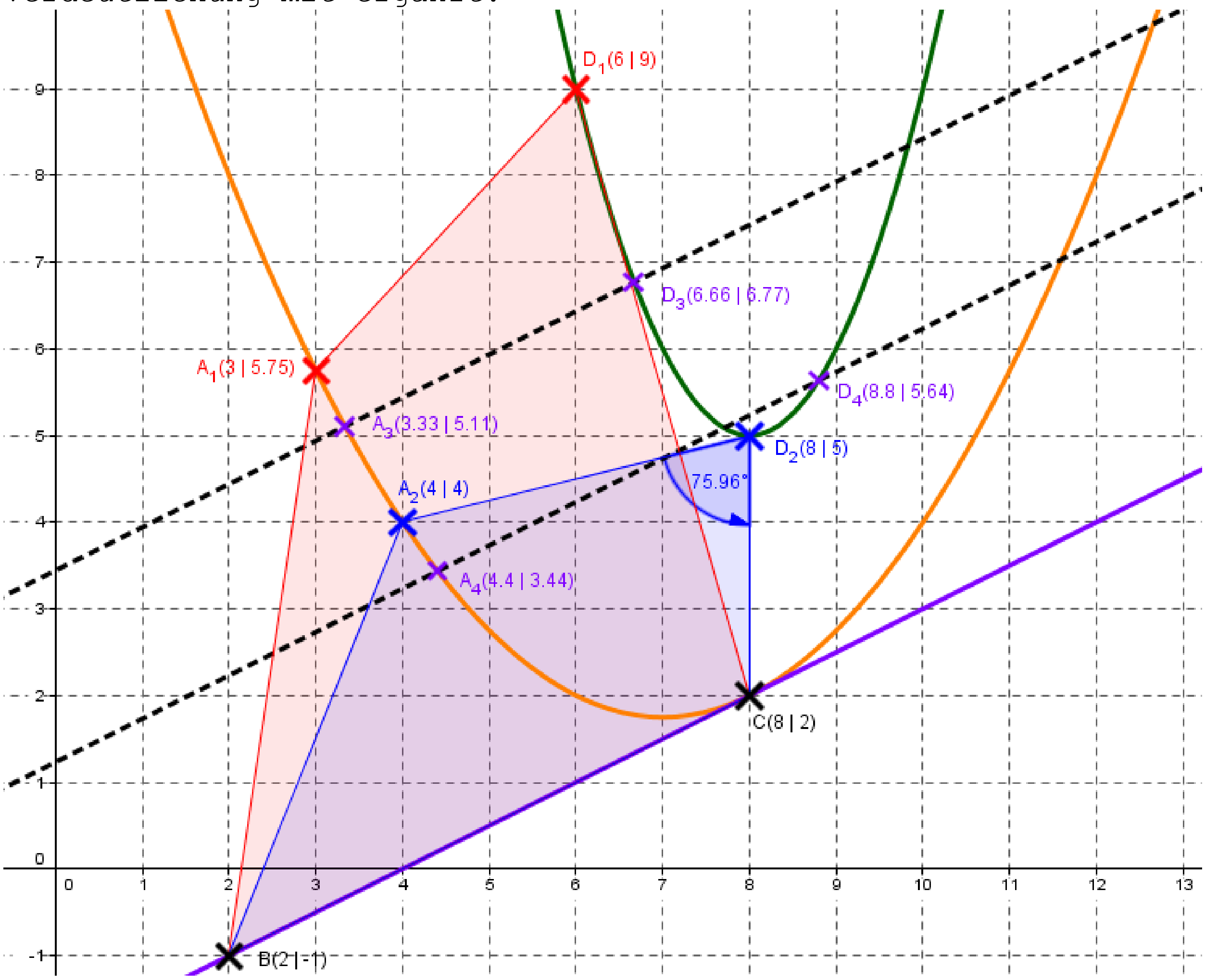
$0{,}25x^2 - 3{,}5x + 14 = 4x^2 - 32{,}5x + 69$

$\Leftrightarrow 3{,}75x^2 - 29x + 55 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 3{,}75 \cdot 55}}{7{,}5} = \frac{29 \pm \sqrt{16}}{7{,}5}$$

$\Rightarrow x_1 = 4{,}4$ und $x_2 = 3\frac{1}{3}$ $\qquad \mathbb{L} = \{3\frac{1}{3}\,;\, 4{,}4\}$

Zeichnung zu dieser Teilaufgabe nicht verlangt, nur zur Verdeutlichung mit ergänzt:



Aufgabe B2

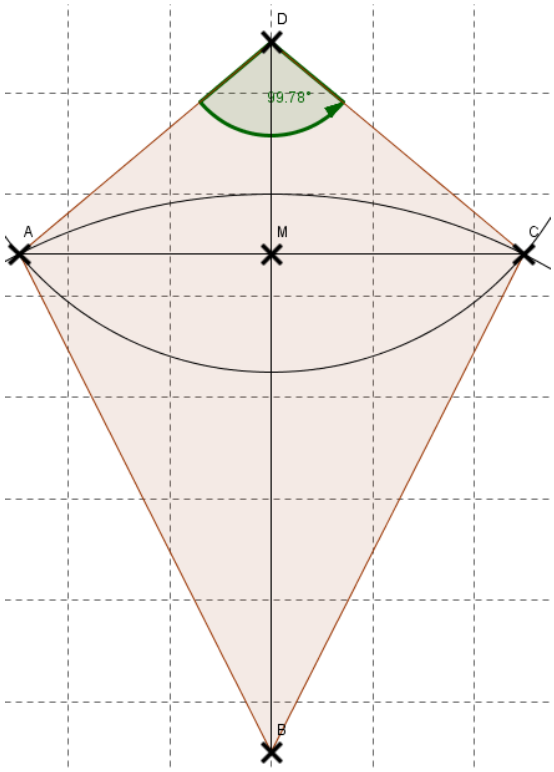
B 2.1

Dreieck ADB:

$\overline{AD} = 65\ \text{cm}$

$\overline{AB} = 110\ \text{cm}$

$\overline{BD} = 140\ \text{cm}$



Kosinussatz:

$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} \cdot \cos\sphericalangle ADB$

$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle ADB = \dfrac{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{-2\,\overline{AD} \cdot \overline{BD}}$

$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle ADB = \dfrac{110^2 - 65^2 - 140^2}{-2 \cdot 65 \cdot 140} = 0{,}64$

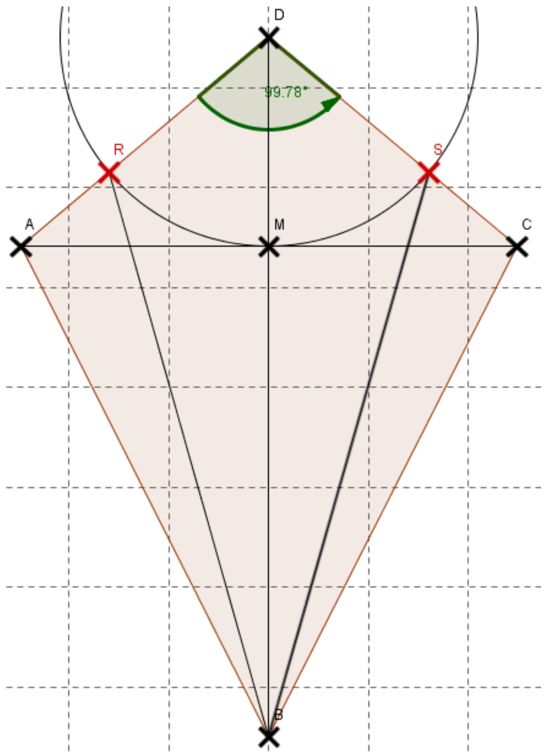
$\Leftrightarrow \sphericalangle ADB = 49{,}89°$

$\Rightarrow \sphericalangle ADC = 2 \cdot \sphericalangle ADB = 99{,}78°$

B 2.2 siehe Zeichnung

B 2.3

Dreieck ADM



$\cos\sphericalangle ADM = \dfrac{\overline{DM}}{\overline{AD}}$

$\Leftrightarrow \overline{DM} = \cos\sphericalangle ADM \cdot \overline{AD}$

$\Leftrightarrow \overline{DM} = \cos 49{,}89° \cdot 65\ \text{cm}$

$\Leftrightarrow \overline{DM} = 41{,}9\ \text{cm}$

Kreisbogen:

$b = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \dfrac{\sphericalangle ADC}{360°}$

$\Leftrightarrow b = 2 \cdot 41{,}9\ \text{cm} \cdot \pi \cdot \dfrac{99{,}87°}{360°}$

$\Leftrightarrow b = 73{,}03\ \text{cm}$ also $73\ \text{cm}$

$\overline{DR} = \overline{DM} = 41{,}9\ \text{cm}$

Kosinussatz:

$\overline{BR}^2 = \overline{DR}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{DR} \cdot \overline{BD} \cdot \cos\sphericalangle RDM$

$\Leftrightarrow \overline{BR}^2 = (41{,}9^2 + 140^2 - 2 \cdot 41{,}9 \cdot 140 \cdot \cos 49{,}89°)\ \text{cm}^2$

$\Leftrightarrow \overline{BR}^2 = (21355{,}61 - 7558{,}42)\ \text{cm}^2$

$\Leftrightarrow \overline{BR}^2 = 13797{,}19\ \text{cm}^2$

$\Leftrightarrow \overline{BR} = 117{,}5\ \text{cm}$

B 2.4
Dreieck ABD:

$A=0,5\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}\cdot\sin\sphericalangle ADB$

$\Leftrightarrow A = 0,5 \cdot 65cm \cdot 140cm \cdot \sin 49,89°$
$\Leftrightarrow A = 3479,88\ cm^2$

Kreissektor grün $= r^2\cdot\pi\cdot\frac{\sphericalangle ADB}{360°} = \overline{DM}^2\cdot\pi\cdot\frac{49,89°}{360°} = 764,34\ cm^2$

Dreieck ABR grün:

$\overline{AR} = \overline{AD} - \overline{DR} = 65\ cm - 41,9\ cm = 23,1\ cm$

$\overline{AR}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BR}^2 - 2\cdot\overline{AB}^2\cdot\overline{BR}\cdot\cos\sphericalangle ABR$

$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle ABR = \frac{\overline{AR}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BR}^2}{-2\overline{AB}\cdot\overline{BR}}$

$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle ABR = \frac{23,1^2-110^2-117,5^2}{-2\cdot110\cdot117,5} = \frac{-25372,64}{-25850} = 0,98$

$\Leftrightarrow \sphericalangle ABR = 11,03°$

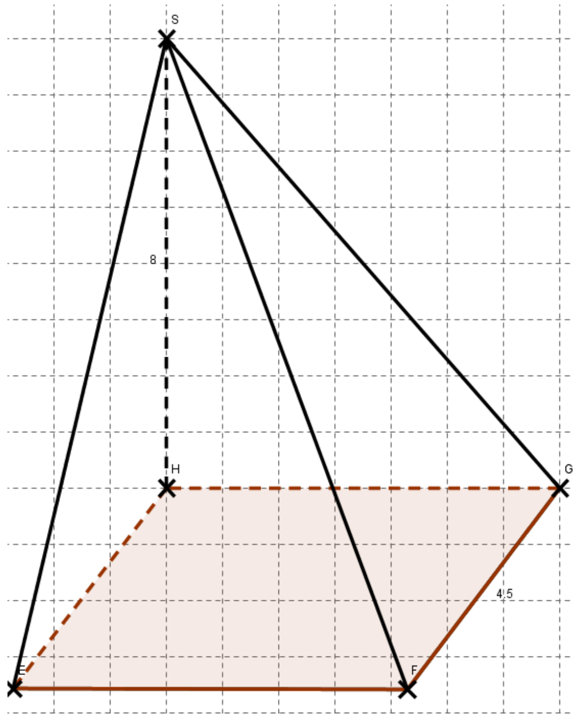
$A_{ABR} = 0,5\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BR}\cdot\sin\sphericalangle ABR = 0,5\cdot 110\ cm\cdot 117,5\ cm\cdot \sin 11,03°$

$\Leftrightarrow A_{ABR} = 1236,42\ cm^2$

Gesamt: $3479,88\ cm^2 \cdot 2 = 6959,76\ cm^2$
Gesamt grün: $(764,34\ cm^2 + 1236,42\ cm^2)\cdot 2 = 4001,52\ cm^2$
Gesamt gelb: $6959,76\ cm^2 - 4001,52\ cm^2 = 2958,24\ cm^2 = 29,58\ dm^2$

[Kleine Abweichung durch unterschiedliches Runden]

B 2.5
$4001,52 : 6959,76 \cdot 100\ \% = 59,50\ \%$



Aufgabe B3

B 3.1 siehe Zeichnung

B 3.2

$\overline{GS}^2 = \overline{HS}^2 + \overline{HG}^2$

$\Leftrightarrow \overline{GS}^2 = (8\ \text{cm})^2 + (7\ \text{cm})^2$

$\Leftrightarrow \overline{GS} = 10{,}63\ \text{cm}$

$A_{Boden} = 9\ \text{cm} \cdot 7\ \text{cm} = 63\ \text{cm}^2$

$A_{hinten} = 0{,}5 \cdot 7\text{cm} \cdot 8\text{cm} = 28\ \text{cm}^2$

$A_{rechts} = 0{,}5 \cdot 9\text{cm} \cdot 10{,}63\text{cm} = 47{,}84\ \text{cm}^2$

$A_{links} = 0{,}5 \cdot 9\text{cm} \cdot 8\text{cm} = 36\ \text{cm}^2$

$\overline{ES}^2 = \overline{HE}^2 + \overline{HS}^2$

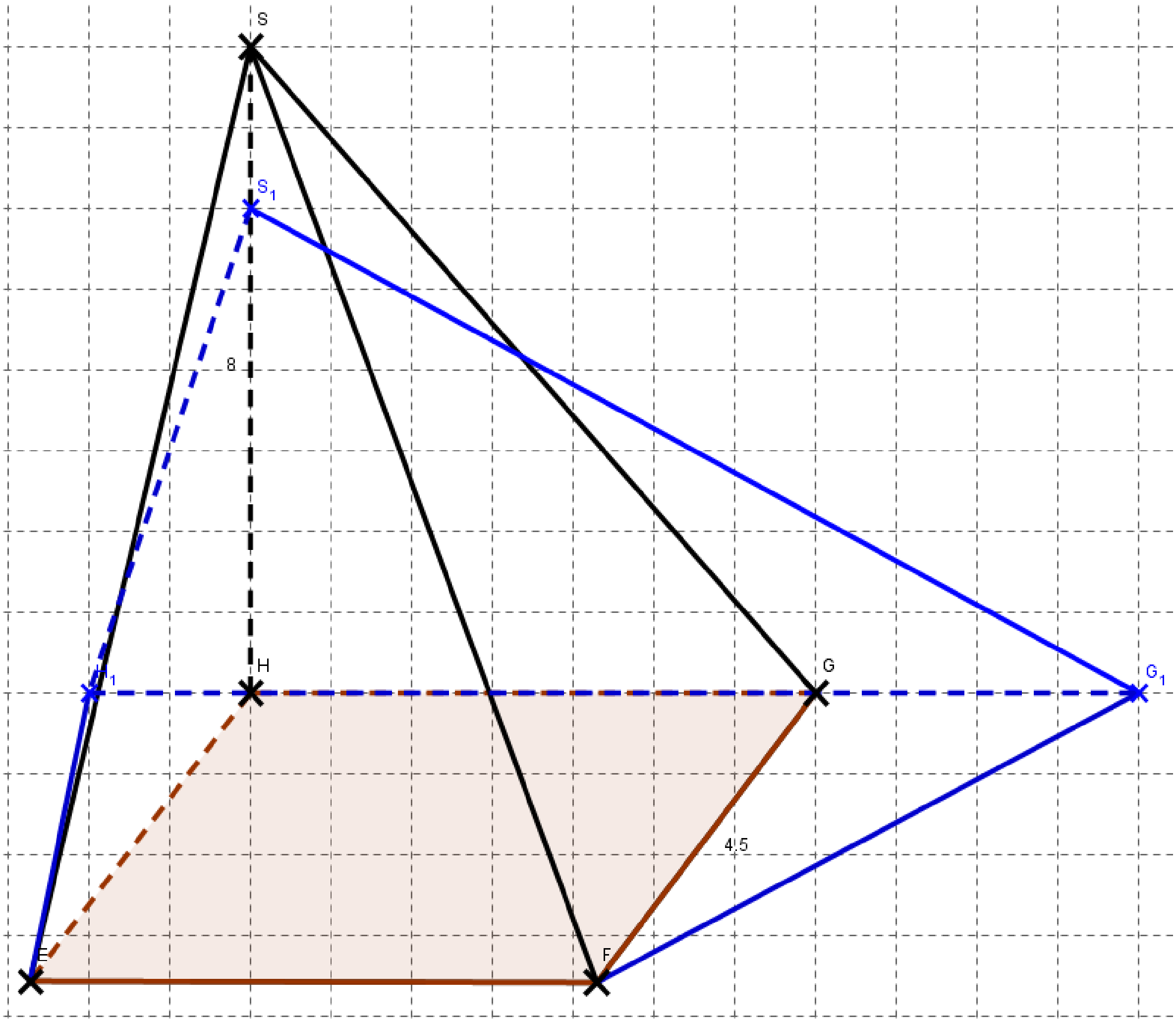
$\Leftrightarrow \overline{ES}^2 = (9\ \text{cm})^2 + (8\ \text{cm})^2$

$\Leftrightarrow \overline{ES} = 12{,}04\ \text{cm}$

$A_{vorne} = 0{,}5 \cdot 7\text{cm} \cdot 12{,}04\text{cm} = 42{,}14\ \text{cm}^2$

$O = 63\text{cm}^2 + 28\text{cm}^2 + 47{,}84\text{cm}^2 + 36\text{cm}^2 + 12{,}04\text{cm}^2 = 186{,}88\ \text{cm}^2$

B 3.3



B 3.4

$V(x) = \frac{1}{3} A_G \cdot h$

$h(x) = (8 - x)\,cm$

$A_G(x) = 0{,}5(\overline{EF} + \overline{H_nG_n}) \cdot \overline{FG}$

$\Leftrightarrow A_G(x) = 0{,}5(7\ cm + 7cm + 4x) \cdot 9cm$

$\Leftrightarrow A_G(x) = (7\ cm + 2x) \cdot 9cm = 63\ cm^2 + 18x\ cm$

$\Rightarrow V(x) = [\frac{1}{3} \cdot (63 + 18x)(8 - x)]\ cm^3$

$\Leftrightarrow V(x) = [\frac{1}{3} \cdot (504 - 63x + 144x - 18x^2)]\ cm^3$

$\Leftrightarrow V(x) = (-6x^2 + 27x + 168)\ cm^3$

B 3.5

$V(x) = -6x^2 + 27x + 168$

$\Leftrightarrow V(x) = -6(x^2 - 4{,}5x) + 168$

$\Leftrightarrow V(x) = -6(x^2 - 4{,}5x + 2{,}25^2 - 2{,}25^2) + 168$

$\Leftrightarrow V(x) = -6[(x - 2{,}25)^2 - 2{,}25^2] + 168$

$\Leftrightarrow V(x) = -6(x - 2{,}25)^2 + 198{,}38$

Damit ist für x = 2,25 das maximale Volumen 198,38 cm^3

B 3.6

$\tan\sphericalangle HGF = \frac{\overline{FG}}{2x}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\overline{FG}}{\tan\sphericalangle HGF} = \frac{9\ cm}{\tan 65°} = 4{,}20$

$\Leftrightarrow x = 2{,}10$

$V(0) = (-6 \cdot 0^2 + 27 \cdot 0 + 168)\ cm^3 = 168\ cm^3$

$V(2{,}1) = (-6 \cdot 2{,}1^2 + 27 \cdot 2{,}1 + 168)\ cm^3 = 198{,}24\ cm^3$

$168\ cm^3 : 198{,}24\ cm^3 \cdot 100\ \% = 84{,}75\ \%$