Abschlussprüfung 1996
an den Realschulen in Bayern

Mathematik II **Aufgabengruppe B**

Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 15.02.2014

Aufgabe B1

B 1.0 $p\colon y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1{,}5$

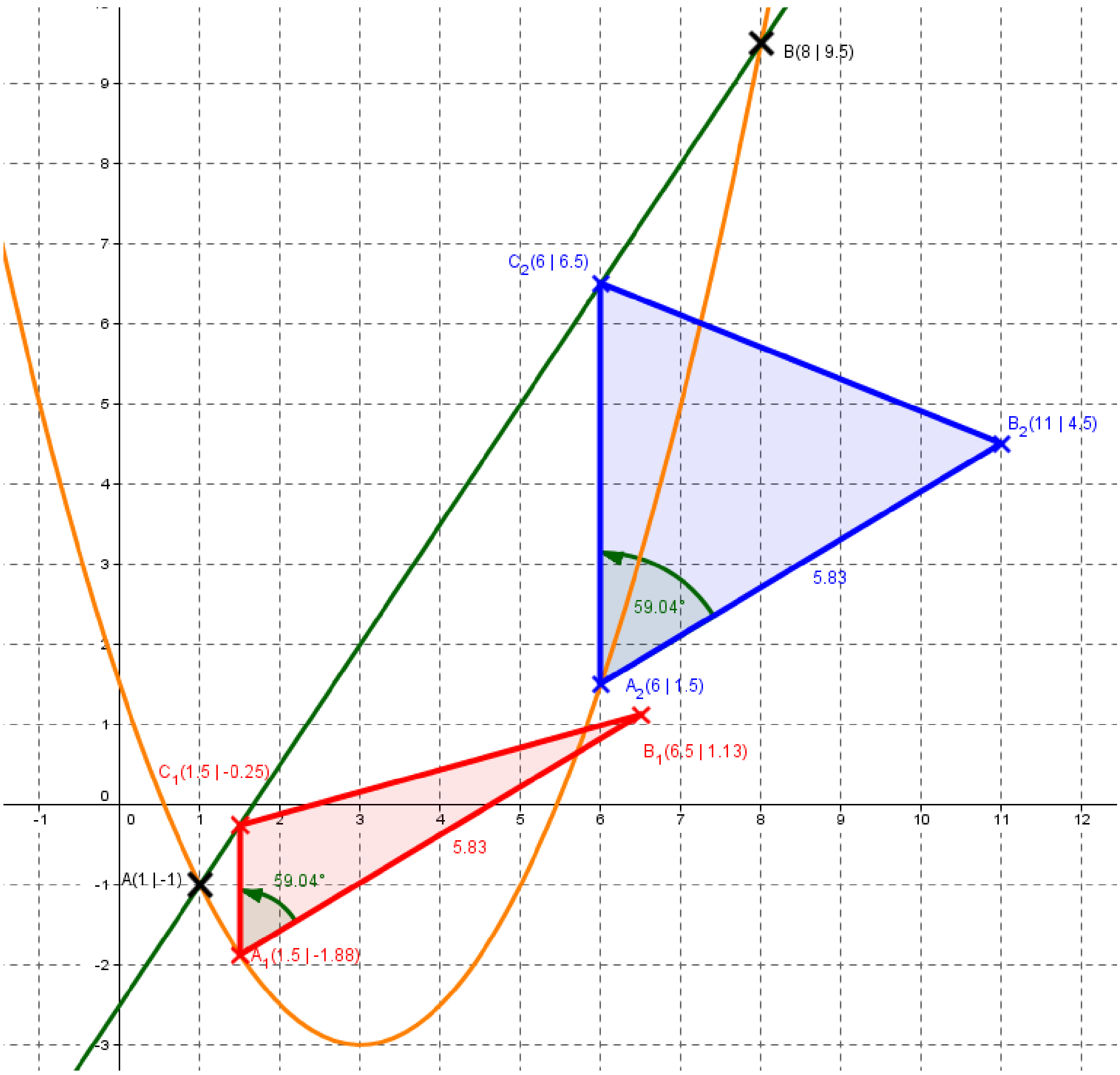
$g\colon y = 1{,}5x - 2{,}5$

B 1.1

x	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
y	1,50	-1,00	-2,50	-3,00	-2,50	-1,00	1,50	5,00	9,50

B 1.2

$A_1(1{,}5|-1{,}125)$ $A_2(6|1{,}5)$
$B_1(6{,}5|-0{,}25)$ $B_2(11|4{,}5)$
$C_1(1{,}5|-0{,}25)$ $C_2(6|6{,}5)$



B 1.3

$\overrightarrow{A_nB_n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow m = \frac{5}{3}$

$\tan \sphericalangle B_nA_nC_n = \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \sphericalangle B_nA_nC_n = \alpha = 59{,}04°$

B 1.4

$\overline{A_nC_n}(x) =$

$\sqrt{[1{,}5x - 2{,}5 - (\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1{,}5)]^2}\,LE$

$= (1{,}5x - 2{,}5 - 0{,}5x^2 + 3x - 1{,}5)\,LE$

$= (-\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5x - 4)\ LE$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5x - 4$

$\Leftrightarrow y = -0{,}5(x^2 - 9x) - 4$

$\Leftrightarrow y = -0{,}5(x - 4{,}5)^2 + 6{,}125$

Damit ist die max. Seitenlänge von $\overline{A_nC_n}$ 6,125 LE für x = 4,5

$\overline{A_nB_n} = \sqrt{[3^2 + 5^2]^2} = 5{,}83\ LE$

$A_3 = 0{,}5 \cdot \overline{A_nB_n} \cdot \overline{A_3C_3} \cdot \sin\alpha\ FE = 0{,}5 \cdot 5{,}83 \cdot 6{,}125 \cdot \sin 59{,}04°\,FE$

$= 15{,}31\ FE$

B 1.5

$-\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5x - 4 = 5{,}83$

$\Leftrightarrow -0{,}5x^2 + 4{,}5x - 9{,}83 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{(4{,}5)^2 - 4 \cdot (-0{,}5 \cdot (-9{,}83))}}{-1}$

$= \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{0{,}59}}{-1}$

$\Rightarrow x_1 = 3{,}73$ und $x_2 = 5{,}27 \quad \mathbb{L} = \{3{,}73;\ 5{,}27\}$

B 1.6

Um bei C einen rechten Winkel zu erhalten, muss der Punkt C einen y-Wert haben, der um 3 größer als der y-Wert von A ist. Also:

$\overline{A_nC_n} = 3$

$\Rightarrow \overline{A_nC_n} = 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5x - 4$

$\Leftrightarrow 0 = -0{,}5x^2 + 4{,}5x - 7$

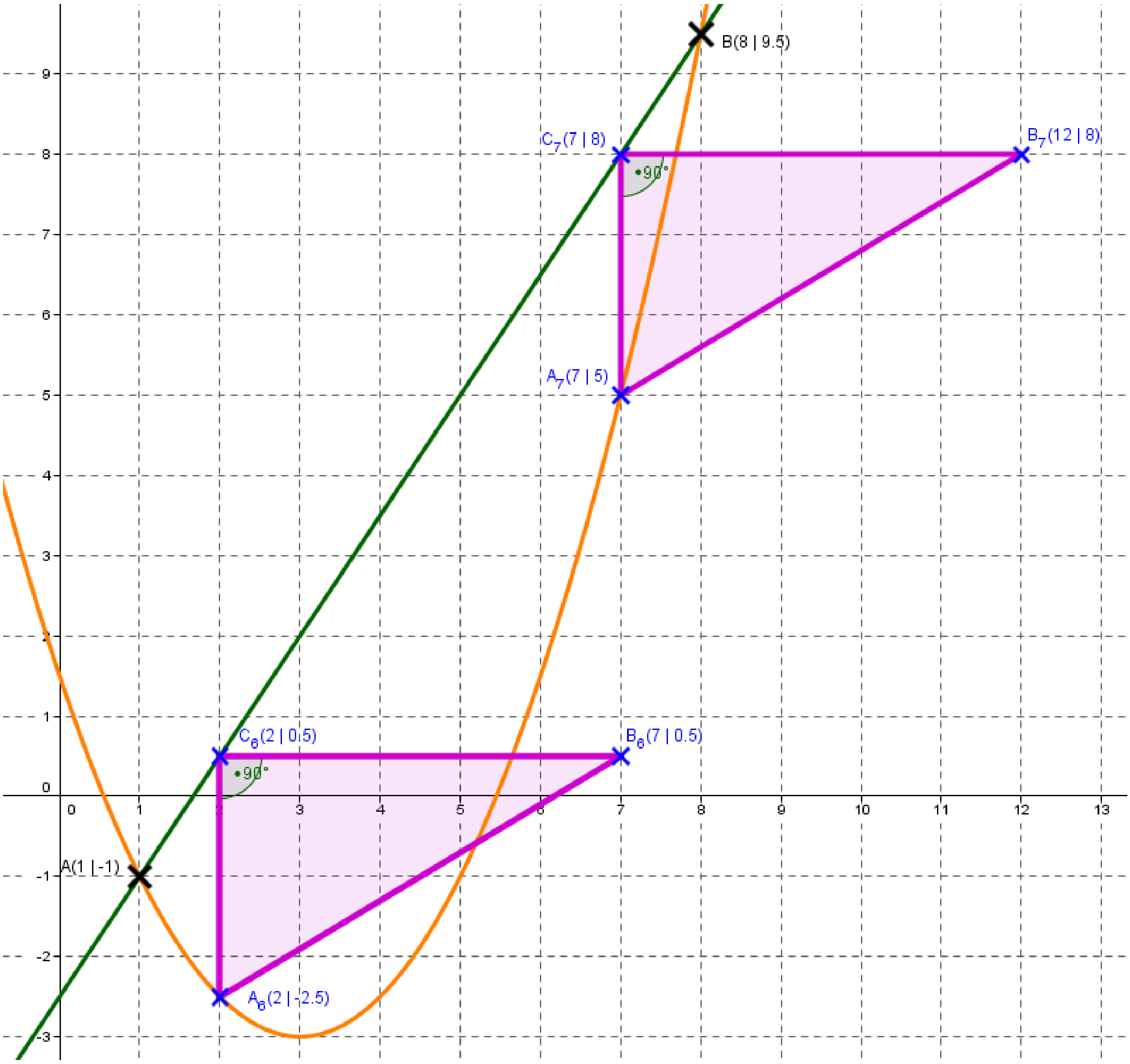
$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{(4{,}5)^2 - 4 \cdot (-0{,}5 \cdot (-7))}}{1}$

$$= \frac{-4,5 \pm \sqrt{6,25}}{-1}$$

$\Rightarrow$ $x_1 = 2$ und $x_2 = 7$ $\mathbb{L} = \{2;\ 7\}$

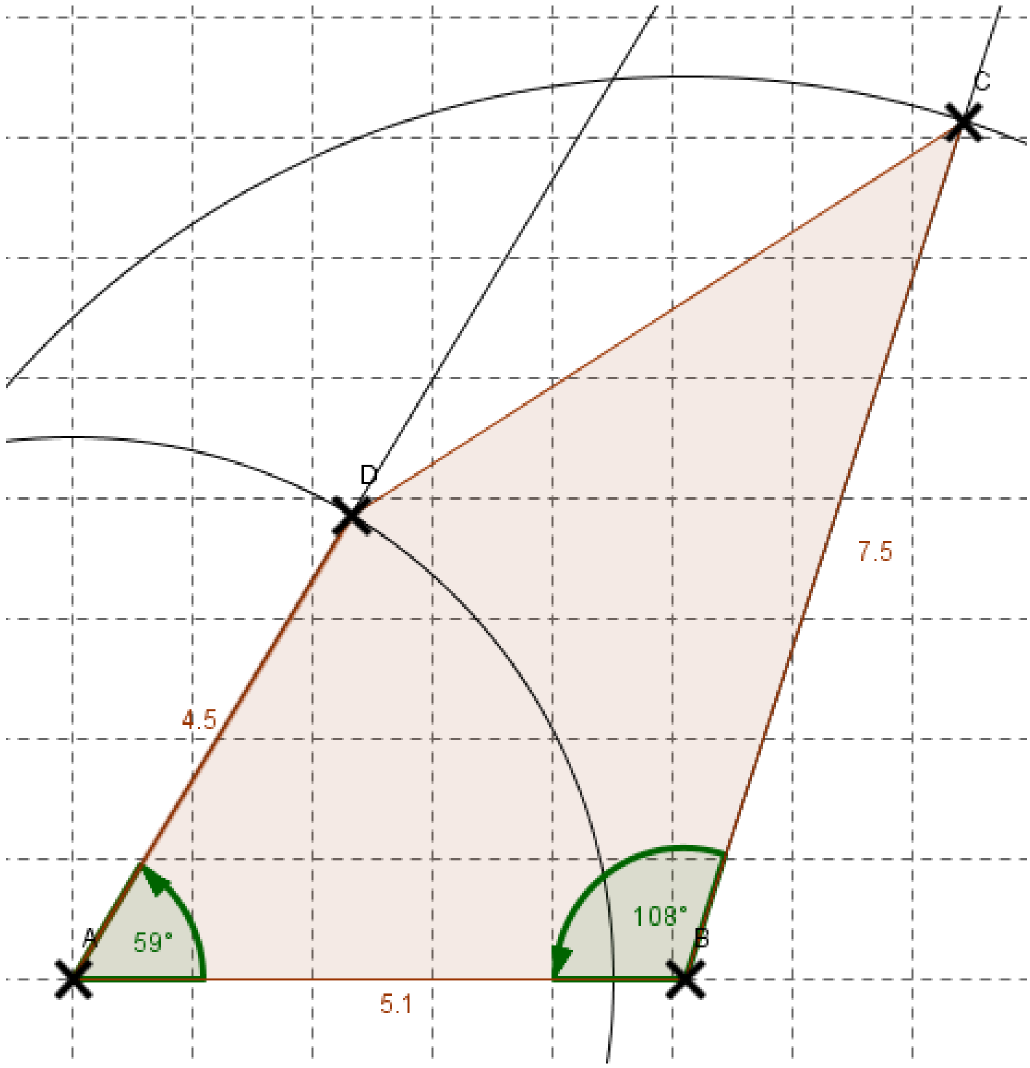
$C_6(2|0,5)$ $C_7(7|8)$

[Zeichnung nur zur Verdeutlichung]



Aufgabe B2

B 2.1



B 2.2

Dreieck ABD

ges.: $\overline{BD}$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \cos\sphericalangle BAD$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{BD}^2 = (51^2 + 45^2 - 2 \cdot 51 \cdot 45 \cdot \cos 59°)\,m^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{BD}^2 = 2261{,}98\ m^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{BD} = 47{,}56\ m \approx 47{,}6\ m$$

$\varepsilon = \sphericalangle DBA$

$$\frac{\overline{AD}}{\sin \varepsilon} = \frac{\overline{DB}}{\sin \sphericalangle BAD}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin \varepsilon = \frac{\overline{AD} \cdot \sin \sphericalangle BAD}{\overline{DB}} = \frac{45\ m \cdot \sin 59°}{47{,}6\ m} = 0{,}81$$

$\Leftrightarrow \quad \varepsilon = 54{,}1°$

(2. Winkel 125,9° keine Lösung wegen Innenwinkelsumme)

B 2.3

ges.: $\overline{DC}$

Dreieck BCD

$\sphericalangle CBD = 108° - 54{,}1° = 53{,}9°$

$\overline{DC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD} \cdot \cos \sphericalangle CBD$

$\Leftrightarrow \quad \overline{DC}^2 = (75^2 + 47{,}6^2 - 2 \cdot 75 \cdot 47{,}6 \cdot \cos 53{,}9°)\,m^2$

$\Leftrightarrow \quad \overline{DC}^2 = 3683{,}90\ m^2$

$\Leftrightarrow \quad \overline{DC} = 60{,}70\ m$

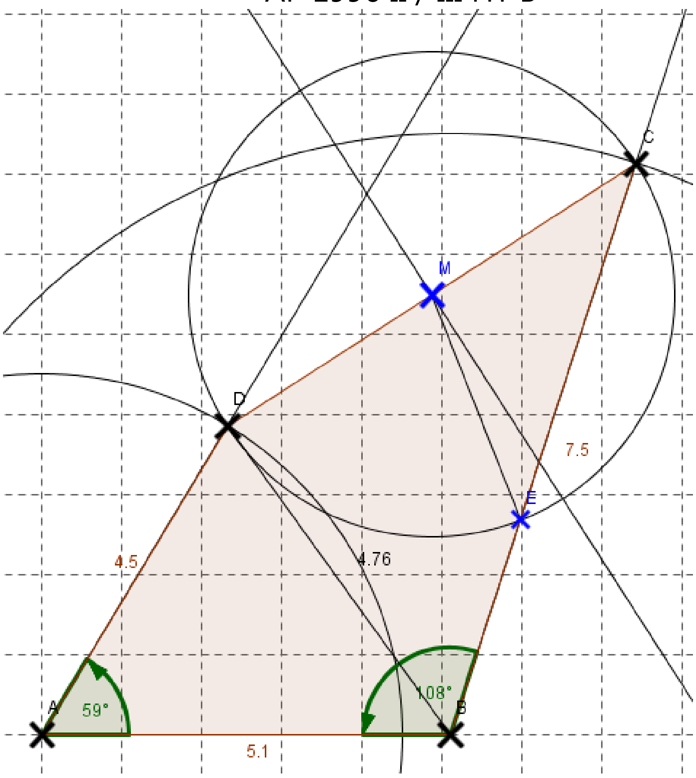
$A_{BCD} = 0{,}5 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \sphericalangle CBD\ m^2$

$\Leftrightarrow \quad A_{BCD} = 0{,}5 \cdot 47{,}6 \cdot 75 \cdot \sin 53{,}9° = 1442{,}26\ m^2$

$A_{ABD} = 0{,}5 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AB} \cdot \sin \sphericalangle BAD\ m^2$

$\Leftrightarrow \quad A_{ABD} = 0{,}5 \cdot 45 \cdot 51 \cdot \sin 59° = 983{,}60\ m^2$

$A_{gesamt} = 1442{,}26\ m^2 + 983{,}60\ m^2 = 2425{,}86\ m^2 \approx 2524{,}9\ m^2$



B 2.4

Dreieck BCD
ges. freie Fläche unten

$r = \overline{DM} = \overline{ME} = 0{,}5\,\overline{DC} = 30{,}35\text{ m}$

$\sphericalangle DCB$:

$\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \sphericalangle DCB$

$$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle DCB = \frac{\overline{BD}^2 - \overline{DC}^2 - \overline{BC}^2}{-2\,\overline{DC} \cdot \overline{BC}}$$

$$= \frac{47{,}6^2 - 60{,}7^2 - 75^2}{-2 \cdot 60{,}7 \cdot 75} = 0{,}77$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle DCB = 39{,}3°$

E liegt auf dem Thaleskreis,
daher hat das Dreieck DEC bei E
einen rechten Winkel.

$\overline{DE}$:

$$\sin\sphericalangle DCE = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \overline{DE} = \sin\sphericalangle DCE \cdot \overline{DC} = \sin 39{,}3° \cdot 60{,}7\text{ m} = 38{,}4\text{ m}$$

$\sphericalangle DME$: $\overline{DE}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{ME}^2 - 2 \cdot \overline{DM} \cdot \overline{ME} \cdot \cos \sphericalangle DME$

$$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle DME = \frac{\overline{DE}^2 - \overline{DM}^2 - \overline{ME}^2}{-2\,\overline{DM} \cdot \overline{ME}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle DME = \frac{38{,}4^2 - 30{,}35^2 - 30{,}35^2}{-2 \cdot 30{,}35 \cdot 30{,}35} = 0{,}2$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle DME = 78{,}5°$

$$A_{Kreissektor} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle DME}{360°} = 30{,}35^2 \cdot \pi \cdot \frac{78{,}5°}{360°}\text{ m}^2 = 631\text{ m}^2$$

$$A_{Rasen} = A_{gesamt} - A_{Kreissektor} = 2524{,}9\text{ m}^2 - 631\text{ m}^2 = 1893{,}9\text{ m}^2$$

Aufgabe B3

B 3.1

$\sphericalangle MAS$: $\tan\alpha = \dfrac{\overline{MS}}{\overline{AM}}$

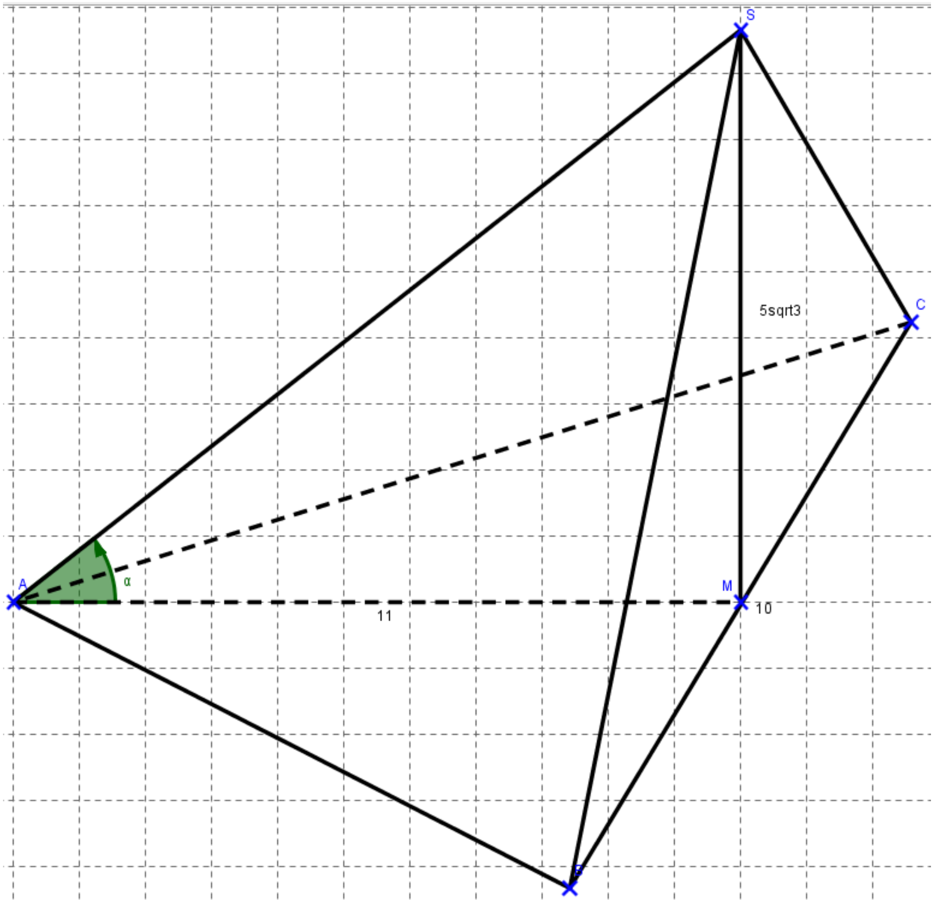
$= \dfrac{5\sqrt{3}\ \text{cm}}{11\ \text{cm}} = 0{,}79$

$\Leftrightarrow\ \alpha = 38{,}21°$

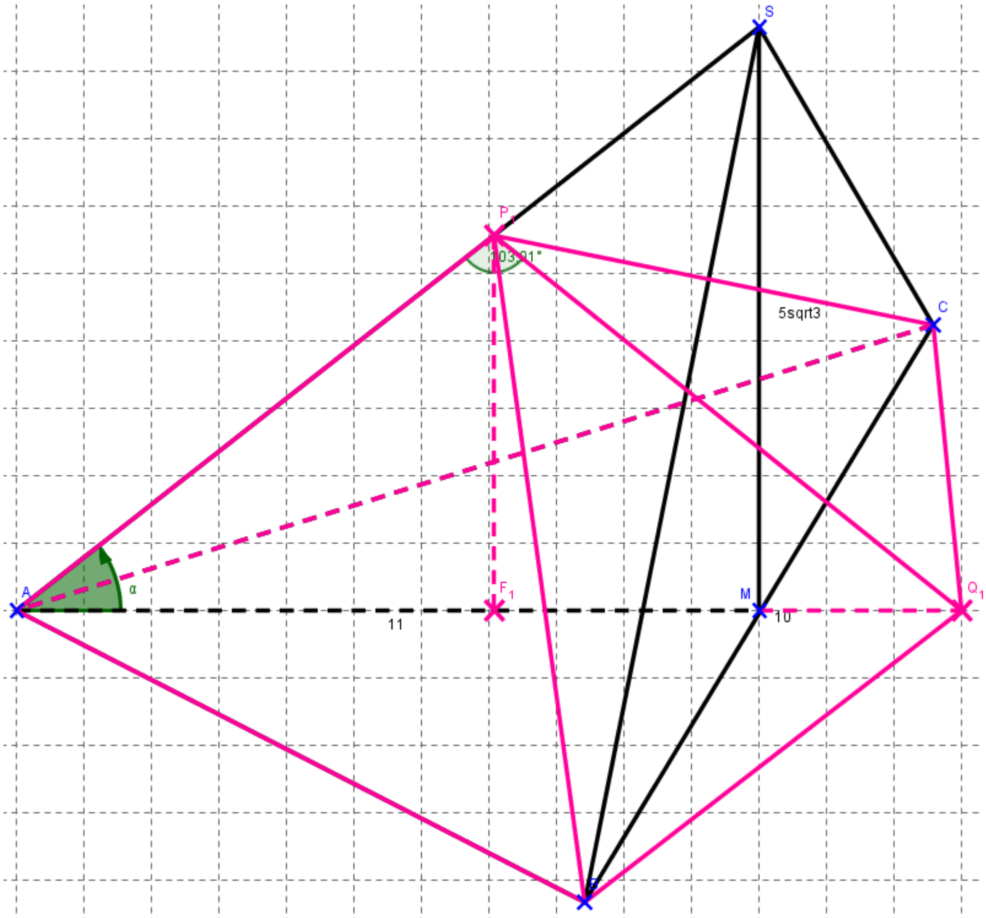
$\overline{AS} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MS}^2}\ \text{cm}$

$= \sqrt{11^2 + (5\sqrt{3})^2}\ \text{cm}$

$= 14\ \text{cm}$



B 3.2



B 3.3
Dreieck AP_2Q_2

$\overline{AP_2}(x) = (14 - 2x)\,cm$

$\overline{AQ_2}(x) = (11 + x)\ cm$

Wenn der $\sphericalangle AP_2Q_2 = 90°$, dann gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AP_2}}{\overline{AQ_2}} \Leftrightarrow \cos 38{,}21° = \frac{14 - 2x}{11 + x}$$

$\Leftrightarrow 0{,}79(11 + x) = 14 - 2x$

$\Leftrightarrow 8{,}69 + 0{,}79x = 14 - 2x$

$\Leftrightarrow 2{,}79x = 5{,}31$

$\Leftrightarrow x = 1{,}9$

B 3.4

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{P_nF_n}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AP_n}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_nF_n} = \frac{\overline{SM} \cdot \overline{AP_n}}{\overline{AS}}\ cm$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_nF_n} = \frac{5\sqrt{3} \cdot (14 - 2x)}{14}\ cm = \frac{5\sqrt{3} \cdot 14 - 5\sqrt{3} \cdot 2x}{14}\ cm$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_nF_n} = \frac{5\sqrt{3} \cdot 7 - 5\sqrt{3} \cdot x}{7} cm = \frac{5\sqrt{3}(7 - x)}{7}\ cm$$

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$$

$A_G = 0{,}5 \cdot e \cdot f = [0{,}5 \cdot 10 \cdot (11 + x)]\ cm^2$

$\Leftrightarrow A_G = (55 + 5x)\ cm^2$

Also:

$$V(x) = [\frac{1}{3} \cdot (55 + 5x) \cdot \frac{5\sqrt{3}(7 - x)}{7}]\ cm^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = [(\frac{55}{3} + \frac{5}{3}x) \cdot \frac{5\sqrt{3}(7 - x)}{7}]\ cm^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = [\frac{55 \cdot 5\sqrt{3}(7 - x)}{3 \cdot 7} + \frac{25x\sqrt{3}(7 - x)}{3 \cdot 7}]\ cm^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = [\frac{25\sqrt{3}}{21}(\frac{11(7 - x)}{1} + \frac{x(7 - x)}{1})]\ cm^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = [\frac{25\sqrt{3}}{21}(77 - 11x + 7x - x^2)]\ cm^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = [\frac{25\sqrt{3}}{21}(-x^2 - 4x + 77)]\ cm^3$$

B 3.5

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (0{,}5 \cdot 11cm \cdot 10cm) \cdot 5\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow V_{ABCS} = \frac{1}{3} \cdot 55\ cm \cdot 5\sqrt{3}\ cm^3$$

Gleichsetzen:

$$\frac{25\sqrt{3}}{21}(-x^2 - 4x + 77) = \frac{1}{3} \cdot 55 \cdot 5\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25 \cdot 3}{21 \cdot 55 \cdot 5}(-x^2 - 4x + 77) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{7 \cdot 11}(-x^2 - 4x + 77) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{77}x^2 - \frac{4}{77}x + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\frac{4}{77} \pm \sqrt{(-\frac{4}{77})^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{77} \cdot 1)}}{-\frac{2}{77}}$$

$$= \frac{\frac{4}{77} \pm \sqrt{\frac{16}{5929} + \frac{308}{5929}}}{-\frac{2}{77}} = \frac{\frac{4}{77} \pm \frac{18}{77}}{-\frac{2}{77}}$$

$\Rightarrow$ $x_1 = -11$ und $x_2 = 7$ $\mathbb{L} = \emptyset$ lt. Definition aus 3.2