Abschlussprüfung 1996
an den Realschulen in Bayern

Mathematik II — Aufgabengruppe A

Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 26.03.2014

Aufgabe A1

A 1.0 **p: $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 5$**

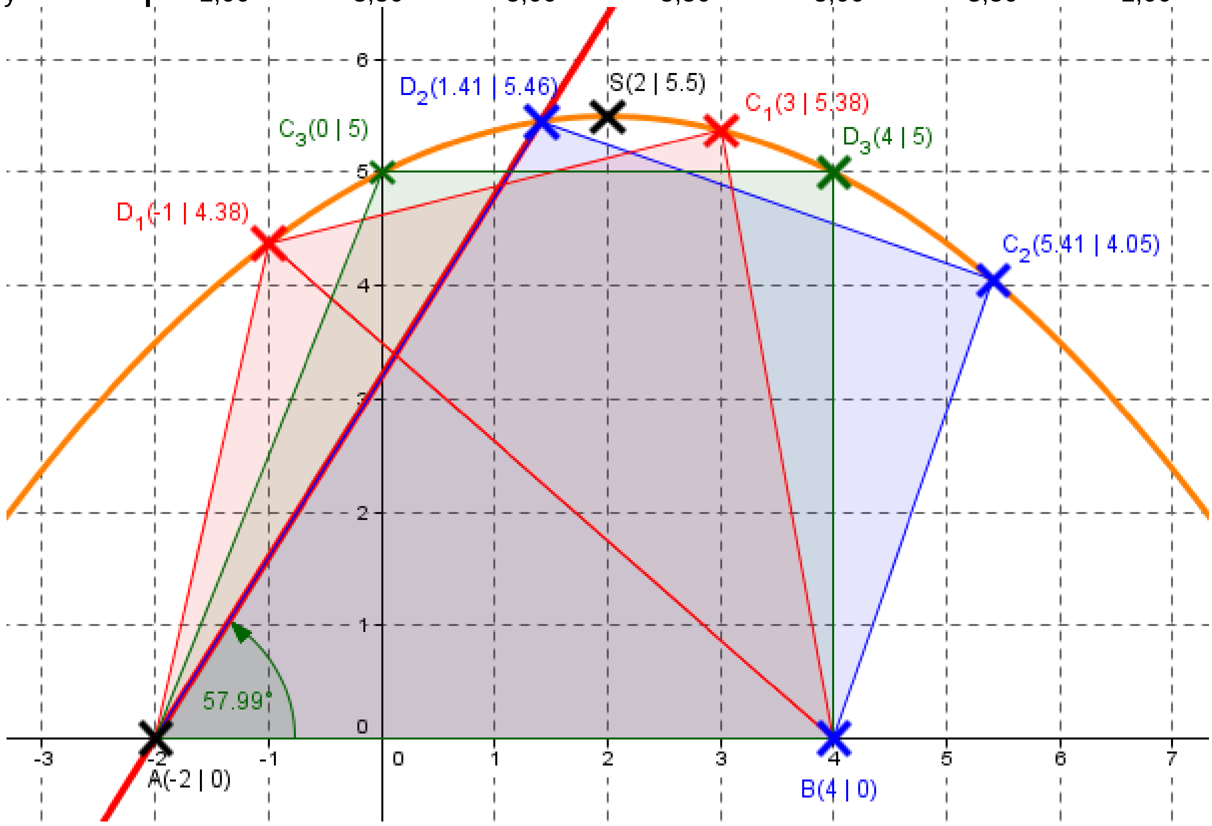
A 1.1 Scheitelpunkt durch quadratische Ergänzung:

$y = -0,125(x^2 - 4x) + 5$

$\Leftrightarrow$ $y = -0,125(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) + 5$

$\Leftrightarrow$ $y = -0,125(x - 2)^2 + 5,5$ $\Rightarrow S(2 \mid 5,5)$

x	-4,0	-2,0	0,0	2,0	4,0	6,0	8,0
y	1,00	3,50	5,00	5,50	5,00	3,50	1,00



A 1.2

$D_1(-1 \mid 4,375)$ $C_1(3 \mid 5,375)$

C_n

x-Wert: x+4 nach Angabe

y-Wert: $-\frac{1}{8}(x+4)^2 + \frac{1}{2}(x+4) + 5 = -\frac{1}{8}(x^2+8x+16) + 0,5x + 7$

$= -\frac{1}{8}x^2 - x - 2 + 0,5x + 7 = -\frac{1}{8}x^2 - 0,5x + 5$

Daraus folgt: $C_n(x+4 \mid -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 5)$

A 1.3

$\sphericalangle BAD_2=58° \Rightarrow \tan 58° = 1,6$

Damit gibt es eine Gerade durch A mit der Steigung 1,6. Ihr Schnittpunkt mit p ist dann D_2.

Punkt-Steigungsform:

$g: y = m(x - xp) + yp$

$\Leftrightarrow y = 1,6(x + 2) + 0$

$\Leftrightarrow y = 1,6x + 3,2$

Gleichsetzen von p und g:

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 5 = 1,6x + 3,2$$

$\Leftrightarrow -0,125x^2 - 1,1x + 1,8 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1,1 \pm \sqrt{(-1,1)^2 - 4\cdot(-0,125\cdot 1,8)}}{-0,25}$$

$$= \frac{1,1 \pm \sqrt{2,11}}{-0,25}$$

$\Rightarrow x_1 = 1,41$ und $x_2 = -10,21$ $\quad \mathbb{L}=\{1,41\}$ da $-4 \leqq x \leqq 4$ laut 1.2

$D_2(1,41 \mid 5,46)$ und damit $C_2(5,41 \mid 4,77)$

A 1.4

Zerlegung in 2 Teildreiecke:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} x - (-2) \\ -0,125x^2 + 0,5x + 5 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -0,125x^2 + 0,5x + 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC_n} = \begin{pmatrix} x + 4 - 4 \\ -0,125x^2 - 0,5x + 5 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -0,125x^2 - 0,5x + 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD_n} = \begin{pmatrix} x - 4 \\ -0,125x^2 + 0,5x + 5 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 4 \\ -0,125x^2 + 0,5x + 5 \end{pmatrix}$$

Dreieck ABD_n:

$$A=0,5\cdot\begin{vmatrix} 6 & x + 2 \\ 0 & -0,125x^2+0,5x+5 \end{vmatrix}$$

$= 0,5(-0,75x^2 + 3x + 30) = -0,375x^2 + 1,5x + 15$

Dreieck BC_nD_n:

$$A=0,5\cdot\begin{vmatrix} x & x-4 \\ -0,125x^2-0,5x+5 & -0,125x^2+0,5x+5 \end{vmatrix}$$

$= 0,5[-0,125x^3 + 0,5x^2 + 5x - (-0,125x^3 - 0,5x^2 + 5x + 0,5x^2 + 2x - 20)]$

$= 0,5[0,5x^2 - 2x + 20) = 0,25x^2 - 1x + 10$

Zusammen:

$-0,375x^2 + 1,5x + 15 + 0,25x^2 - x + 10 = -0,125x^2 + 0,5x + 25$

Damit $A(x) = (-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 25)$ FE

A 1.5

Gesucht sind zwei Punkte C_3 und D_3, die den gleichen y-Wert haben $\Rightarrow$ Gleichsetzen der y-Werte von C_n und D_n.

$$-0{,}125x^2 + 0{,}5x + 5 = -0{,}125x^2 - 0{,}5x + 5$$

$\Leftrightarrow$ $x = 0$

$D_3(0 \mid 5)$ und damit $C_3(4 \mid 5)$

[Zeichnung nur zur Veranschaulichung]

$\mathbf{A_{Trapez}} = 0{,}5(a+c)\cdot h = 0{,}5(6\text{ cm} + 4\text{ cm}) \cdot 5\text{ cm} = 25\text{ cm}^2$

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 25 = 25$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0{,}5 \pm \sqrt{(0{,}4)^2 - 4\cdot(-0{,}125\cdot 0)}}{-0{,}25}$$

$$= \frac{-0{,}5 \pm 0{,}4}{-0{,}25}$$

$\Rightarrow$ $x_1 = 0{,}4$ und $x_2 = 3{,}6$ $\mathbb{L} = \{0{,}4;\ 3{,}6\}$

$C_4(4{,}4 \mid 4{,}78)$ oder $C_4(7{,}6 \mid 1{,}58)$

Aufgabe A2

A 2.1

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha$$

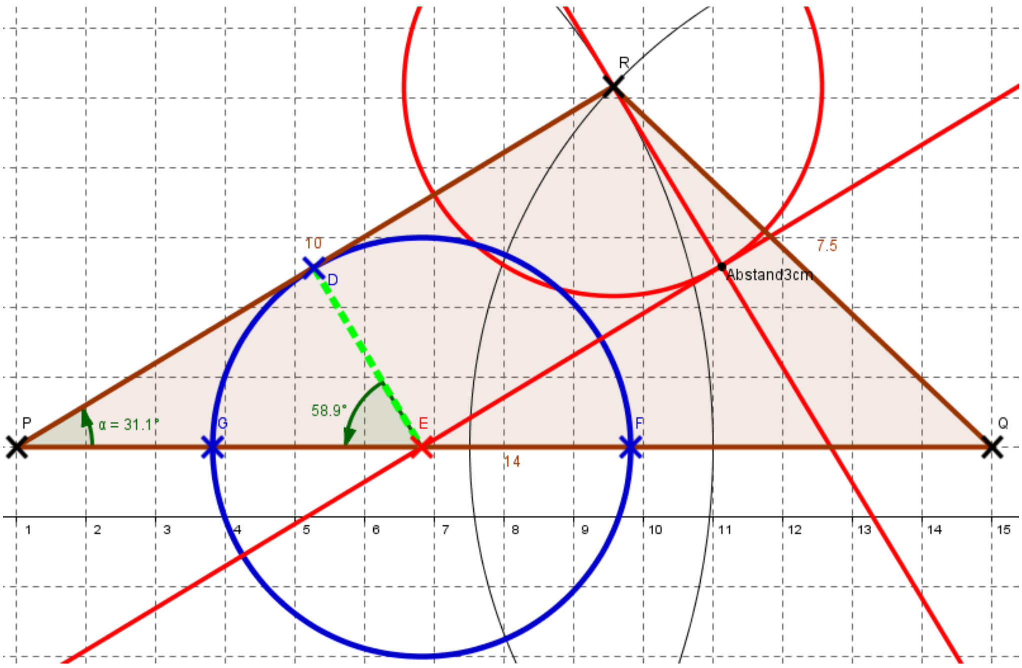
$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2\cdot b\cdot c} = \frac{7{,}5^2 - 10^2 - 14^2}{-2\cdot 10\cdot 14} = 0{,}86$$

$\Leftrightarrow$ $\alpha = 31{,}10°$

A 2.2

Konstruktion vom Punkt E (in rot):

Lot auf [PR] durch R, Kreis um R mit r = 3cm, Parallele zu [PR], Schnittpunkt mit [PQ] ist E.



A 2.3

Dreieck PED:

$\overline{DE} = 3\ \text{cm}$

$\sphericalangle DEP = 180° - 31{,}1° - 90° = 58{,}9°$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{PD}} \Leftrightarrow \overline{PD} = \frac{\overline{DE}}{\tan\alpha} = \frac{3\ \text{cm}}{\tan 31{,}1°} = 4{,}97\ \text{cm}$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{PE}} \Leftrightarrow \overline{PE} = \frac{\overline{DE}}{\sin\alpha} = \frac{3\ \text{cm}}{\sin 31{,}1°} = 5{,}81\ \text{cm}$$

$$A_{PED} = 0{,}5 \cdot \overline{PD} \cdot \overline{PE} \cdot \sin\alpha = 0{,}5 \cdot 4{,}97\ \text{cm} \cdot 5{,}81\ \text{cm} \cdot \sin 31{,}1°$$

$$\Leftrightarrow A_{PED} = 7{,}46\ \text{cm}^2$$

$$A_{KreissektorimDreieckPED} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle DEP}{360°} = (3\ \text{cm})^2 \cdot \pi \cdot \frac{58{,}9°}{360°} = 4{,}63\ \text{cm}^2$$

$$A_{linkerBereichvonPEDohneKreissektor} = 7{,}46\ \text{cm}^2 - 4{,}63\ \text{cm}^2 = 2{,}83\ \text{cm}^2$$

Dreieck PQR:

$$A_{PQR} = 0{,}5 \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{PR} \cdot \sin\alpha = 0{,}5 \cdot 14\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm} \cdot \sin 31{,}1°$$

$$\Leftrightarrow A_{PQR} = 36{,}16\ \text{cm}^2$$

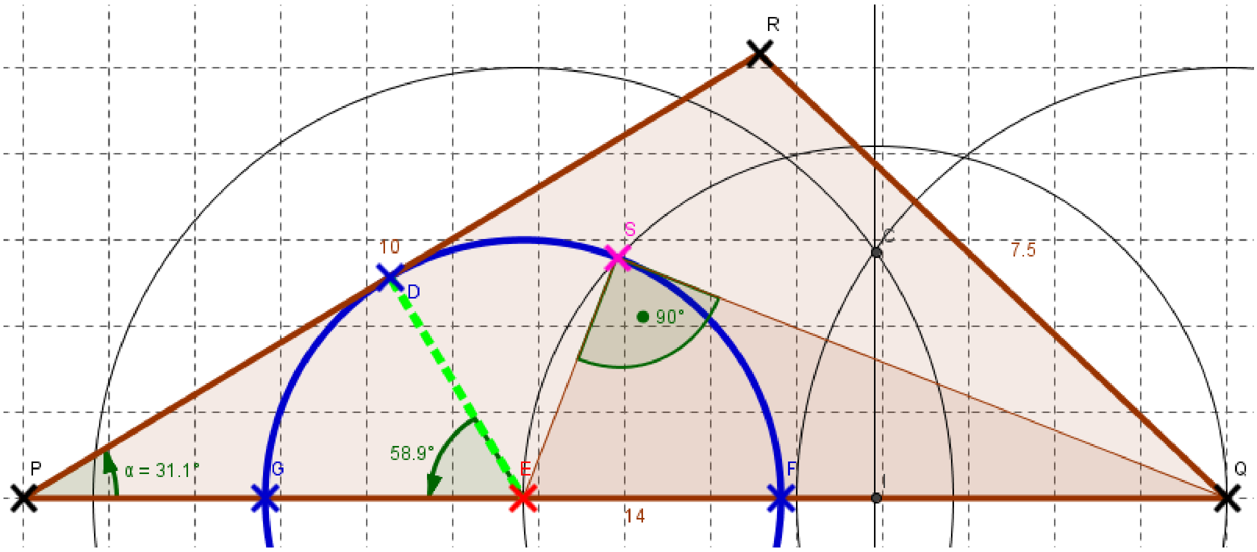
Die gesuchte Fläche ist nun:

$$A_{gesucht} = A_{PQR} - A_{Halbkreis} - A_{linkerBereichvonPEDohneKreissektor}$$

$$\Leftrightarrow A_{gesucht} = 36{,}16\ \text{cm}^2 - 0{,}5 \cdot r^2 \cdot \pi - 2{,}83\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow A_{gesucht} = 36{,}16\ \text{cm}^2 - 14{,}14\ \text{cm}^2 - 2{,}83\ \text{cm}^2 = 19{,}19\ \text{cm}^2$$

A 2.4



Konstruktion von S:
Strecke [EQ] halbieren. Kreis um Mittelpunkt dieser Strecke durch E (Thaleskreis). Schnittpunkt Thaleskreis mit blauem Kreis ist der Punkt S (zweiter möglicher Schnittpunkt unten entfällt wegen Umlaufsinn!).

Aus 2.3: $\overline{PE} = 5{,}81$ cm und durch blauen Kreis: $\overline{ES} = 3$ cm

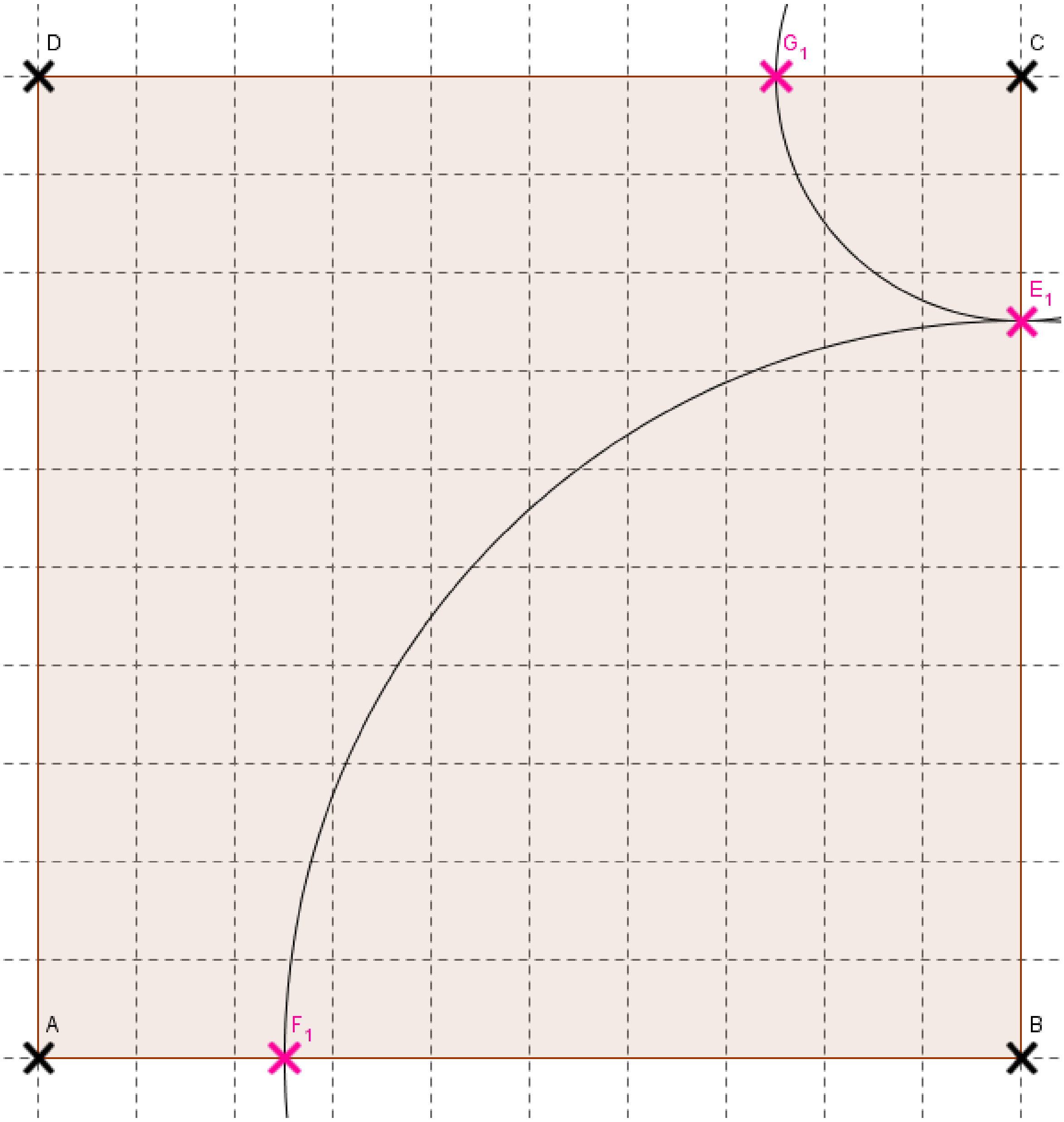
Damit gilt: $\overline{EQ} = \overline{PQ} - \overline{PE} = 14 \text{ cm} - 5{,}81 \text{ cm} = 8{,}19 \text{ cm}$

$$\sin \sphericalangle SQE = \frac{\overline{ES}}{\overline{EQ}} = \frac{3 \text{ cm}}{8{,}19 \text{ cm}} = 0{,}37$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle SQE = 21{,}49°$
(und 158,51°, keine Lösung wegen Innenwinkelsumme)

Aufgabe A3

A 3.1



A 3.2

$u = (\overline{AF_n} + b(F_nE_n) + b(E_nG_n) + \overline{G_nD} + \overline{DA})\,LE$

$\Leftrightarrow u = ([10-x] + 0{,}25 \cdot 2 \cdot x \cdot \pi + 0{,}25 \cdot 2 \cdot (10-x) \cdot \pi + x + 10)\ LE$

$\Leftrightarrow u = (20 + 0{,}5 \cdot x \cdot \pi + 0{,}5 \cdot \pi \cdot (10 - x))\ LE$

$\Leftrightarrow u = (20 + 0{,}5 \cdot x \cdot \pi + 5 \cdot \pi - 0{,}5\ x \cdot \pi\ )\ LE$

$\Leftrightarrow u = (20 + 5 \cdot \pi)\ LE$ (w) da von x unabhängig

A 3.3

Berechnung in cm / cm³

Rotierendes Quadrat -> Zylinder

$V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h = (10)^2 \cdot \pi \cdot 10 = 1000 \cdot \pi$

Fehlende Stücke: Kugel1 und Kugel2

$V_{Kugel1} = 0{,}5 \cdot \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi = \frac{4}{6}\pi x^3$

$V_{Kugel2} = 0{,}5 \cdot \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi = \frac{4}{6}(10-x)^3 \cdot \pi = \frac{4}{6}(100 - 20x + x^2)(10 - x) \cdot \pi$

$\Leftrightarrow V_{Kugel2} = \frac{4}{6}\pi(1000 - 100x - 200x + 20x^2 + 10x^2 - x^3)$

$\Leftrightarrow V_{Kugel2} = \frac{4}{6}\pi(1000 - 300x + 30x^2 - x^3)$

$V_{Gesamt} = V_{Zylinder} - V_{Kugel1} - V_{Kugel2}$

$\Leftrightarrow V_{Gesamt} = 1000\pi - \frac{4}{6}\pi x^3 - \frac{4}{6} \cdot \pi(1000 - 300x + 30x^2 - x^3)$

$\Leftrightarrow V_{Gesamt} = 1000\pi - \frac{2}{3}\pi x^3 - \frac{2}{3} \cdot \pi 1000 + \frac{2}{3} \cdot \pi 300x - \frac{2}{3} \cdot \pi 30x^2 + \frac{2}{3} \cdot \pi x^3)$

$\Leftrightarrow V_{Gesamt} = \frac{1}{3}1000\pi + 200\pi x - 20 \cdot \pi x^2 = 20\pi \cdot (-x^2 + 10x + \frac{50}{3})$

Und damit: $V(x) = 20\pi \cdot (-x^2 + 10x + \frac{50}{3})\,cm^3$

A 3.4

$V(x) = -x^2 + 10x + \frac{50}{3}$

$\Leftrightarrow V(x) = -(x^2 - 10x) + \frac{50}{3}$

$\Leftrightarrow V(x) = -(x^2 - 10x + 5^2 - 5^2) + \frac{50}{3}$

$\Leftrightarrow V(x) = -(x - 5)^2 + 25 + \frac{50}{3}$

$\Leftrightarrow V(x) = -(x - 5)^2 + \frac{125}{3}$

Für x = 5 ergibt sich das maximale Volumen:

$20\pi \cdot \frac{125}{3}\ cm^3 = \frac{2500\pi}{3}\ cm^3 = \frac{10000\pi}{12}\ cm^3$

A 3.5

$$V(7{,}5) = 20\pi \cdot \left(-7{,}5^2 + 10 \cdot 7{,}5 + \frac{50}{3}\right)\ \text{cm}^3$$

$$\Leftrightarrow\ V(7{,}5) = 20\pi \cdot \left(18\frac{3}{4} + \frac{200}{12}\right)\ \text{cm}^3$$

$$\Leftrightarrow\ V(7{,}5) = 20\pi \cdot \left(\frac{225}{12} + \frac{200}{12}\right)\ \text{cm}^3$$

$$\Leftrightarrow\ V(7{,}5) = 20\pi \cdot \frac{425}{12}\text{cm}^3 = \frac{8500\pi}{12}\text{cm}^3$$

Differenz: $\frac{10000\pi}{12}\ \text{cm}^3 - \frac{8500\pi}{12}\text{cm}^3 = \frac{1500\pi}{12}\text{cm}^3$

$$\frac{1500\pi}{12}\text{cm}^3 : \frac{10000\pi}{12}\ \text{cm}^3 \cdot 100\ \% = 15\ \%$$