Abschlussprüfung 1995
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Aufgabengruppe A
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 15.02.2014

Aufgabe A1

A 1.0 A(−1|−1) und C(4|4) auf

$p_1: y = -x^2 + 4x + 4$ und $p_2: y = 0{,}5x^2 + bx + c$

A 1.1 $y = -(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) + 4$

$\Leftrightarrow y = -(x-2)^2 + 8 \Rightarrow S_1(2 \mid 8)$

A 1.2 I $0{,}5(-1)^2 + b(-1) + c = -1$

$\Leftrightarrow c = -1{,}5 + b$

II $0{,}5(4)^2 + 4b + c = 4$

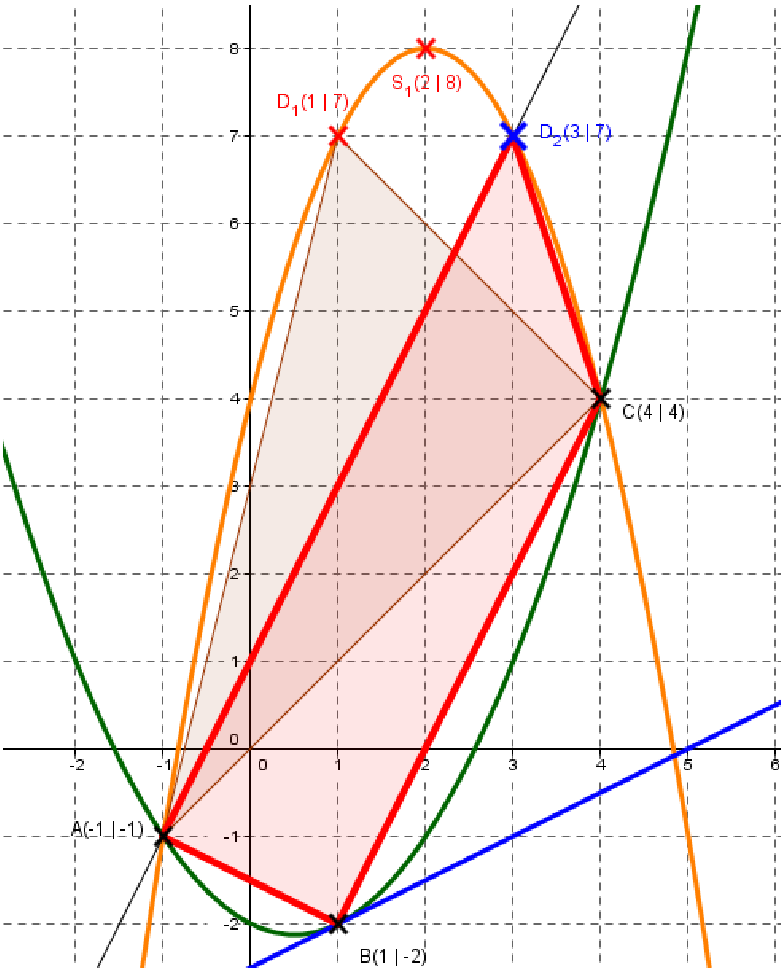
I in II: $8 + 4b - 1{,}5 + b = 4$

$\Leftrightarrow 5b = -2{,}5 \quad \Leftrightarrow b = -0{,}5$

b in I: $c = -1{,}5 - 0{,}5 = -2$

Also: $p_2: y = 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 2$

x	-2,0	-1,0	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y	1,00	-1,00	-2,00	-2,00	-1,00	1,00	4,00	8,00



A 1.3
$D_1(1 \mid 7)$

A 1.4 **g: y = 0,5x − 2,5**

Gleichsetzen: $\mathbf{0{,}5x - 2{,}5} = \mathbf{0{,}5x^2 - 0{,}5x - 2}$

$\Leftrightarrow 0{,}5x^2 - x + 0{,}5 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}5)}}{1}$$

$= \frac{1 \pm 0}{1} \Rightarrow x = 1 \quad \mathbb{L} = \{1\}$ und damit $B(1 \mid -2)$

A 1.5

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ -2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 - (-1) \\ 4 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} x - (-1) \\ -x^2 + 4x + 4 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ -x^2 + 4x + 5 \end{pmatrix}$$

Dreieck ABC:

$$A = 0{,}5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \text{ FE} = 0{,}5(10 + 5) \text{ FE} = 7{,}5 \text{ FE}$$

Dreieck ACD_n:

$$A = 0{,}5 \begin{vmatrix} 5 & x+1 \\ 5 & -x^2 + 4x + 5 \end{vmatrix} \text{ FE} = 0{,}5(-5x^2 + 20x + 25 - 5x - 5) \text{ FE}$$

$= -2{,}5x^2 + 7{,}5x + 10$ FE

Zusammen:

$A = [7{,}5 + (-2{,}5x^2 + 7{,}5x + 10)]$ FE $= (-2{,}5x^2 + 7{,}5x + 17{,}5)$FE

A_{max}:

$A(x) = -2{,}5(x^2 - 3x) + 17{,}5$

$\Leftrightarrow A(x) = -2{,}5(x^2 - 3x + 1{,}5^2 - 1{,}5^2) + 17{,}5$

$\Leftrightarrow A(x) = -2{,}5(x^2 - 1{,}5)^2 + 23{,}125$ (FE)

Somit ist $A_{max} = 23{,}125$ FE für $x = 1{,}5$.

1.6

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 4 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$ Damit hätte eine Gerade durch B und C die Steigung $m = \frac{6}{3} = 2$

Eine Gerade h durch A und D_2 muss die gleiche Steigung 2 haben.

h: $y = m(x - x_p) + y_p$

$\Leftrightarrow y = 2(x + 1) - 1 = 2x + 1$

Gleichsetzen mit p_1:

$\mathbf{-x^2 + 4x + 4} = 2x + 1$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{-2}$$

$= \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} \Rightarrow x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ $\mathbb{L} = \{3\}$ da bei -1 bereits der Punkt A liegt. $\Rightarrow D_2\ (3 \mid 7)$

[Zeichnung nur zur Veranschaulichung]

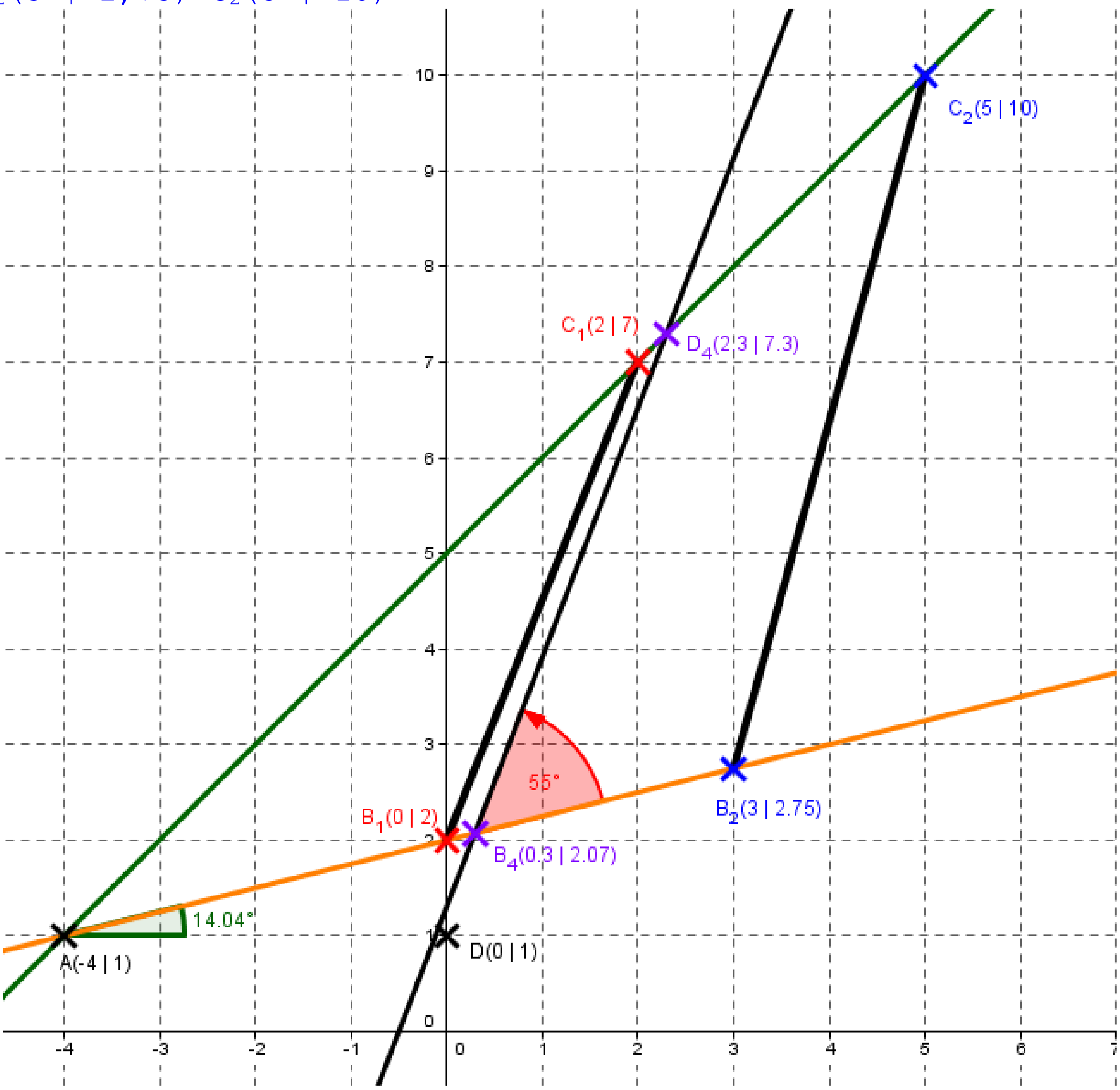
Aufgabe A2

A 2.1

$A(-4 \mid 1)$; **g: $y = 0{,}25x + 2$**; **h: $y = x + 5$**

$B_1(0 \mid 2)$ $C_1(2 \mid 7)$

$B_2(3 \mid 2{,}75)$ $C_2(5 \mid 10)$



A 2.2

$$\overline{B_nC_n}\ (x) = \sqrt{[x + 2 - x]^2 + [(x + 2) + 5 - (0{,}25x + 2)]^2}\ \text{LE}$$

$$\Leftrightarrow \overline{B_nC_n}\ (x) = \sqrt{4 + [x + 7 - 0{,}25x - 2]^2}\ \text{LE}$$

$$\Leftrightarrow \overline{B_nC_n}\ (x) = \sqrt{4 + (0{,}75x + 5)^2}\ \text{LE}$$

$$\Leftrightarrow \overline{B_nC_n}\ (x) = \sqrt{4 + 0{,}5625x^2 + 7{,}5x + 25}\ \text{LE}$$

$\Leftrightarrow \quad \overline{B_nC_n}\ (x) = \sqrt{0{,}5625x^2 + 7{,}5x + 29}$ LE

$\Leftrightarrow \quad \overline{B_nC_n}\ (x) = \sqrt{\frac{9}{16}x^2 + \frac{15}{2}x + 29}$ LE

A 2.3

$\sqrt{\frac{9}{16}x^2 + \frac{15}{2}x + 29} = 2\sqrt{17} \qquad |\ldots^2$

$\Leftrightarrow \frac{9}{16}x^2 + \frac{15}{2}x + 29 = 68$

$\Leftrightarrow \frac{9}{16}x^2 + \frac{15}{2}x - 39 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7{,}5 \pm \sqrt{(7{,}5)^2 - 4 \cdot 0{,}5625 \cdot (-39)}}{1{,}125}$

$= \frac{-7{,}5 \pm \sqrt{144}}{1{,}125} \Rightarrow x_1 = 4$ und $x_2 = -17\frac{1}{3}$ $\qquad \mathbb{L} = \{4\}$ nach Einschränkung in 2.0

Damit ist $C_3(6 \mid 11)$.

2.4

D hat den gleichen y-Wert wie A. Daher Berechnung über die Steigung der Geraden g:

$\tan \varepsilon = 0{,}25 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 14{,}04°$

Die Punkte **B_4** und **C_4** liegen auf einer Geraden mit der Steigung $55° + 14{,}04° = 69{,}04°$ also $m = 2{,}61$

$B4(x \mid \mathbf{0{,}25x + 2}) \quad C4(x+2 \mid \mathbf{x + 2 + 5})$

$\text{I} \quad y = mx + t$

$\Leftrightarrow \quad y = 2{,}61x + t$

$\quad y = m(x - x_p) + y_p$

$\text{II} \quad y = 2{,}61(x - x) + 0{,}25x + 2 = 0{,}25x + 2$

$\text{III} \ y = 2{,}61(x - (x + 2)) + x + 7 = x + 1{,}78$

$\text{I} = \text{II} \quad 2{,}61x + t = 0{,}25x + 2$

$\Leftrightarrow \quad t = -2{,}36x + 2$

$\text{I} = \text{III} \ 2{,}61x + t = x + 1{,}78$

$\Leftrightarrow \quad t = -1{,}61x + 1{,}78$

$-2{,}36x + 2 = -1{,}61x + 1{,}78$

$\Leftrightarrow -0{,}75x = -0{,}12$

$\Leftrightarrow x = 0{,}16$

$t = -1{,}61 \cdot (0{,}16) + 1{,}78 = 1{,}52$

$y = 2{,}61x + 1{,}52$

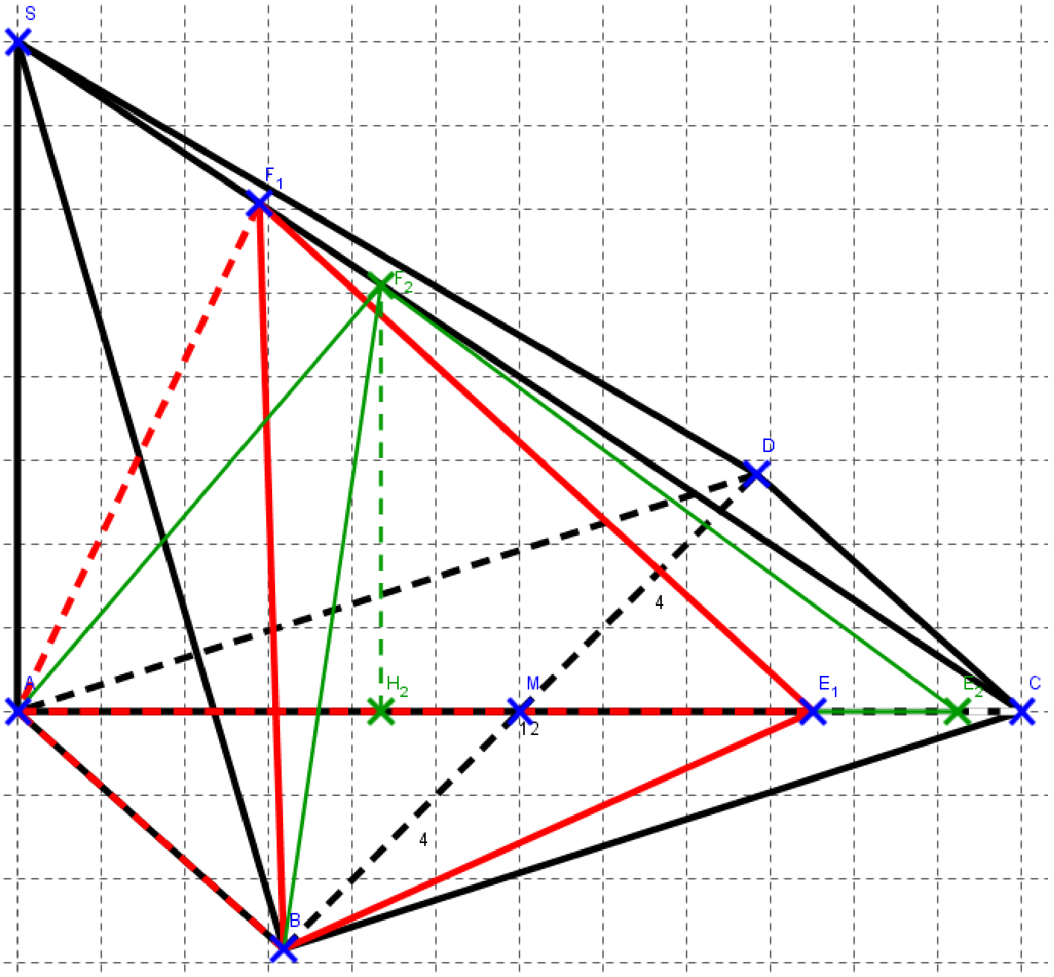
$2{,}61x_{B4} + 1{,}52 = 0{,}25x_{B4} + 2$

$\Leftrightarrow 2{,}36x_{B4} = 0{,}48$

$\Leftrightarrow x_{B4} = 0{,}2$

Aufgabe A3

A 3.1



A 3.2 (rot)

$\gamma = \sphericalangle SCA$

$$\tan\gamma = \frac{\overline{SA}}{\overline{AC}} = \frac{8\ \text{cm}}{12\ \text{cm}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \gamma = 33{,}69°$$

$\overline{SF_1} = 3{,}5\ \text{cm}$

$\sphericalangle ASC = 180° - 90° - 33{,}69° = 56{,}31°$

$$\overline{AF_1}^{\,2} = \overline{AS}^{\,2} + \overline{SF_1}^{\,2} - 2 \cdot \overline{AS} \cdot \overline{SF_1} \cdot \cos\sphericalangle ASC$$

$$\Leftrightarrow \overline{AF_1}^{\,2} = [8^2 + 3{,}5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3{,}5 \cdot \cos 56{,}31°]\text{cm}^2 = 45{,}19\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AF_1} = 6{,}72\ \text{cm}$$

A 3.3 (grün)

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = (6\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2 = 100\text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 10\text{ cm}$$

$$\sin \sphericalangle BAM = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{8\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 0{,}8 \Leftrightarrow \sphericalangle BAM = 53{,}13° \text{ (und } 126{,}87°,$$

nicht möglich, da bereits ein 70°-Winkel vorhanden ist)

Somit: $\sphericalangle AE_2B = 180° - 70° - 53{,}13° = 56{,}87°$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \sphericalangle AE_2B} = \frac{\overline{AE_2}}{\sin \sphericalangle E_2BA} \Leftrightarrow \overline{AE_2} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin \sphericalangle E_2BA}{\sin \sphericalangle AE_2B}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AE_2} = \frac{10\text{ cm} \cdot \sin 70°}{\sin 56{,}78°} = 11{,}23\text{ cm}$$

$x = 11{,}23\text{ cm} - 6\text{ cm} = 5{,}23\text{ cm}$

A 3.4

$$V_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AS}$$

$$\Leftrightarrow V_{ABCDS} = \frac{1}{6} \cdot 12\text{ cm} \cdot 16\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 256\text{ cm}^2$$

$$\overline{SC}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{AC}^2 = (8\text{ cm})^2 + (12\text{ cm})^2 = 208\text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{SC} = 14{,}42\text{ cm}$$

$$\overline{CF_2} = \overline{SC} - 5{,}22\text{ cm} = 14{,}42\text{ cm} - 5{,}22\text{ cm} = 9{,}2\text{ cm}$$

$$\frac{\overline{SA}}{h_2} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CF_2}} \Leftrightarrow h_2 = \frac{\overline{SA} \cdot \overline{CF_2}}{\overline{SC}} = \frac{8\text{ cm} \cdot 9{,}2\text{ cm}}{14{,}42\text{ cm}} = 5{,}1\text{ cm}$$

$$V_{ABE2F2} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AE_2} \cdot \overline{MB} \cdot h_2$$

$$\Leftrightarrow V_{ABE2F2} = \frac{1}{6} \cdot 11{,}22\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} \cdot 5{,}1\text{ cm} = 76{,}3\text{ cm}^2$$

Also: $76{,}3 : 256 \cdot 100\,\% = 29{,}8\,\%$