Abschlussprüfung 1994
an den Realschulen in Bayern

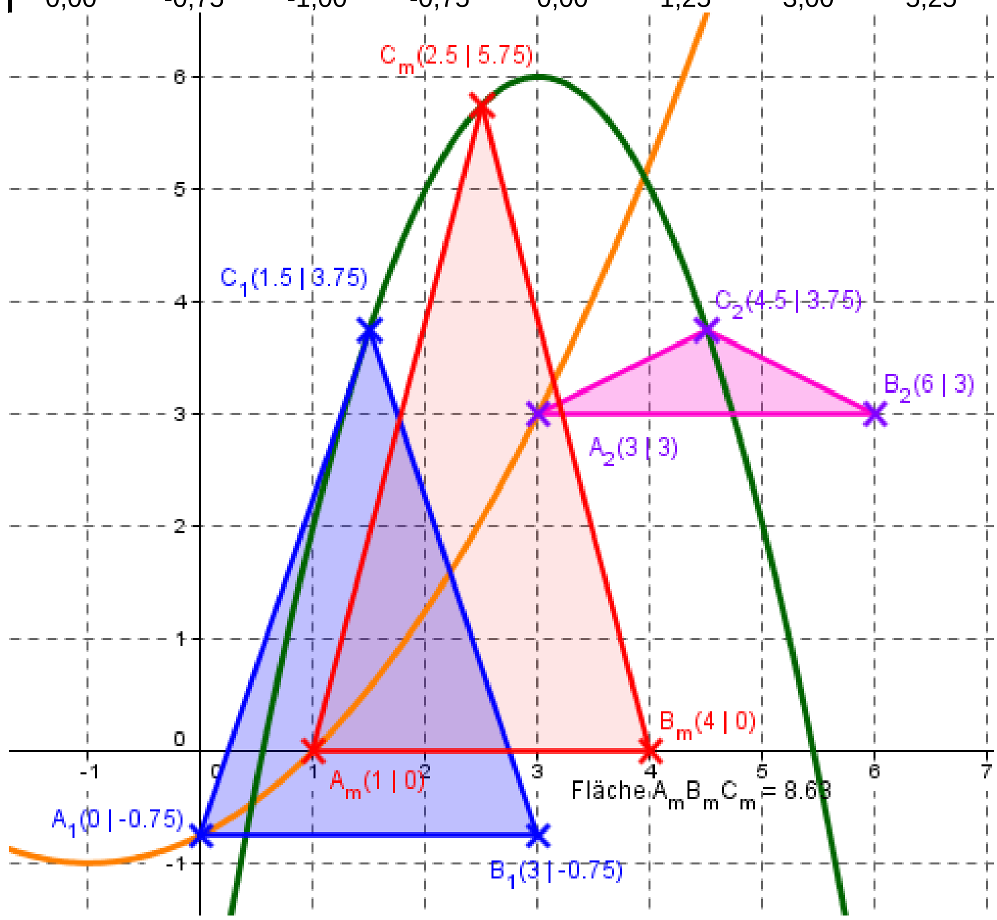
Mathematik II Aufgabengruppe A

Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 23.10.2013

Aufgabe A1 **p_1 : $y = 0{,}25x^2 + 0{,}5x - 0{,}75$**

A 1.1

x	-3,0	-2,0	-1,0	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y	0,00	-0,75	-1,00	-0,75	0,00	1,25	3,00	5,25	8,00



A 1.2 $P_1(0{,}5|-0{,}25)$ und $P_2(4|5)$ auf nach unten geöffneter Normalparabel p_2: $y = -x^2 + bx + c$.

I $-0{,}25 = -(0{,}5)^2 + b \cdot 0{,}5 + c$

$\Leftrightarrow$ $c = -0{,}5b$

II $5 = -4^2 + 4b + c$

$\Leftrightarrow$ $21 - 4b = c$

I = II

$-0{,}5b = 21 - 4b$

$\Leftrightarrow$ $3{,}5b = 21$ $\Leftrightarrow$ $b = 6$ in I

$c = -0{,}5 \cdot 6 = -3$

Also: **p_2 : $y = -x^2 + 6x - 3$**

A 1.3 **$A_1(0 \mid -0{,}75)$, $B_1(3 \mid -0{,}75)$, $C_1(1{,}5 \mid 3{,}75)$**

$A_2(3 \mid -0{,}75)$, $B_2(6 \mid 3)$, $C_2(4{,}5 \mid 3{,}75)$

A 1.4
x-Wert: x + 1,5 in p_2 : $y = -x^2 + 6x - 3$

$\Rightarrow y_C = -(x + 1{,}5)^2 + 6(x + 1{,}5) - 3$
$\Leftrightarrow y_C = -x^2 - 3x - 2{,}25 + 6x + 9 - 3$
$\Leftrightarrow y_C = -x^2 + 3x + 3{,}75$

A 1.5
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

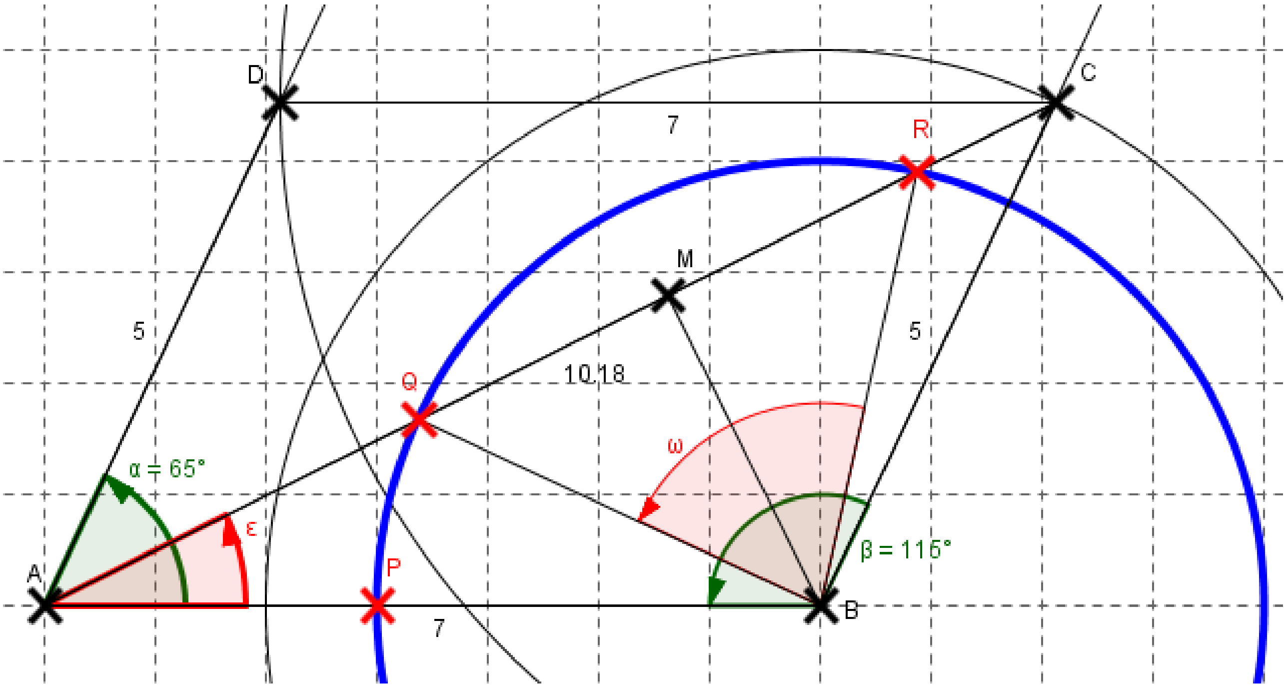
$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x + 1{,}5 - x \\ -x^2 + 3x + 3{,}75 - (0{,}25x^2 + 0{,}5x - 0{,}75) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}25x^2 + 2{,}5x + 4{,}5 \end{pmatrix}$

$A(x) = 0{,}5 \begin{vmatrix} 3 & 1{,}5 \\ 0 & -1{,}25x^2 + 2{,}5x + 4{,}5 \end{vmatrix}$ FE
$\Leftrightarrow A(x) = 0{,}5(-3{,}75x^2 + 7{,}5x + 13{,}5)$ FE
$\Leftrightarrow A(x) = (-1{,}875x^2 + 3{,}75x + 6{,}75)$ FE

A 1.6
$A(x) = -1{,}875(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 6{,}75$
$\Leftrightarrow A(x) = -1{,}875(x - 1)^2 + 8{,}625$
A_{max} ist also 8,625 FE für x = 1.
Damit: $A_0(1 \mid 0)$, $B_0(4 \mid 0)$, $C_0(2{,}5 \mid 5{,}75)$
[Zeichnung zur Kontrolle]

Aufgabe A2

A 2.1 und A 2.2



$\varepsilon = \sphericalangle BAC$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 115°)\,cm^2 = 103{,}58\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 10{,}18\ cm$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \beta} = \frac{\overline{BC}}{\sin \varepsilon} \Leftrightarrow \sin \varepsilon = \frac{\overline{BC} \cdot \sin \beta}{\overline{AC}} = \frac{5\ cm \cdot \sin 115°}{10{,}18\ cm} = 0{,}45$$

$\Leftrightarrow \varepsilon = 26{,}43°$ (153,57° wegen $\alpha = 60°$ nicht möglich)

A 2.3

$\sphericalangle AQB$ im Dreieck AQB:

$$\frac{\overline{QB}}{\sin \varepsilon} = \frac{\overline{AB}}{\sin \sphericalangle AQB}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle AQB = \frac{\overline{AB} \cdot \sin \varepsilon}{\overline{QB}} = \frac{7\ cm \cdot \sin 26{,}43°}{4\ cm} = 0{,}78$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle AQB(1) = 51{,}16°$ und als Lösung (Zeichnung) $\sphericalangle AQB = 128{,}84°$

$\sphericalangle QBA = 180° - 26{,}43° - 128{,}84° = 24{,}73°$

$$\overline{AQ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BQ}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BQ} \cdot \cos \sphericalangle QBA$$

$$\Leftrightarrow \overline{AQ}^2 = (7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos 24{,}73°)\,cm^2 = 14{,}14\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AQ} = 3{,}76\ cm$$

Dreieck ABC: $\sphericalangle RCB = 180° - 26{,}43° - 115° = 38{,}57°$

Dreieck BCR:

$$\frac{\overline{BR}}{\sin \sphericalangle RCB} = \frac{\overline{BC}}{\sin \sphericalangle BRC}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle BRC = \frac{\overline{BC} \cdot \sin \sphericalangle RCB}{\overline{BR}} = \frac{5\text{ cm} \cdot \sin 38{,}57°}{4\text{ cm}} = 0{,}78$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle BRC(1) = 51{,}2°$ und als Lösung (Zeichnung) $\sphericalangle BRC = 128{,}8°$

$\sphericalangle CBR = 180° - 38{,}57° - 128{,}8° = 12{,}63°$

$$\overline{RC}^2 = \overline{BR}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{BR} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \sphericalangle RBC$$

$$\Leftrightarrow \overline{RC}^2 = (4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 12{,}63°)\text{cm}^2 = 1{,}97\text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{RC} = 1{,}4\text{ cm}$$

Also gilt:

$\overline{QR} = \overline{AC} - \overline{AQ} - \overline{RC} = 10{,}18\text{ cm} - 3{,}76\text{ cm} - 1{,}4\text{ cm} = 5{,}02\text{ cm}$

$\sphericalangle RBQ = \beta - \sphericalangle QBA - \sphericalangle BBR = 115° - 24{,}73° - 12{,}63° = 77{,}64°$

[Dieser Wert kommt auch bei der Computer-Konstruktion heraus, sollte also genauer als der Wert aus der Angabe sein]

$\sphericalangle BQM = 180° - \sphericalangle AQB = 180° - 128{,}84° = 51{,}16°$

$$\sin \sphericalangle BQM = \frac{\overline{MB}}{\overline{BQ}} \Leftrightarrow \overline{MB} = \sin \sphericalangle BQM \cdot \overline{BQ} = 0{,}78 \cdot 4\text{ cm} = 3{,}12\text{ cm}$$

A 2.4

$$b = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle RBQ}{360°} = 2 \cdot 4\text{ cm} \cdot \pi \cdot \frac{77{,}64°}{360°} = 5{,}42\text{ cm}$$

[mit 77,48°: 5,41 cm]

A 2.5

Dreieck ACD:

$$A_{gesamt} = 0{,}5 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \sin(\alpha - \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow A_{gesamt} = 0{,}5 \cdot 10{,}18\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} \cdot \sin 38{,}57°$$

$$\Leftrightarrow A_{gesamt} = 15{,}87\text{ cm}^2$$

Segment:

$$A_{Segment} = A_{Sektor} - A_{BRQ}$$

$$\Leftrightarrow A_{Segment} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle RBQ}{360°} - 0{,}5 \cdot \overline{BQ} \cdot \overline{BR} \cdot \sin\sphericalangle RBQ$$

$$\Leftrightarrow A_{Segment} = (4\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot \frac{77{,}64°}{360°} - 0{,}5 \cdot 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot \sin 77{,}64°$$

$\Leftrightarrow A_{Segment} = 3{,}03\text{ cm}^2$ [mit 77,48°: 3,01 cm²]

$A_{gesuchteFläche} = A_{gesamt} - A_{Segment} = 15{,}87\text{ cm}^2 - 3{,}03\text{ cm}^2 = 12{,}84\text{ cm}^2$

[mit 77,48°: 12,86 cm²]

Aufgabe A3

A 3.1

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{5\ \text{cm}}{13\ \text{cm}} = 0{,}38 \Leftrightarrow \alpha = 67{,}38°$$

A 3.2

$$\tan\alpha = \frac{\overline{Z_1Z_4}}{\overline{AM}-x} \Leftrightarrow \overline{Z_1Z_4} = \tan\alpha \cdot (\overline{AM}-x)$$

$$\Leftrightarrow \overline{Z_1Z_4} = \tan 67{,}38° \cdot [(5 - x)\,\text{cm}]$$

$$M(x) = 2r\cdot\pi\cdot\overline{Z_1Z_4}$$

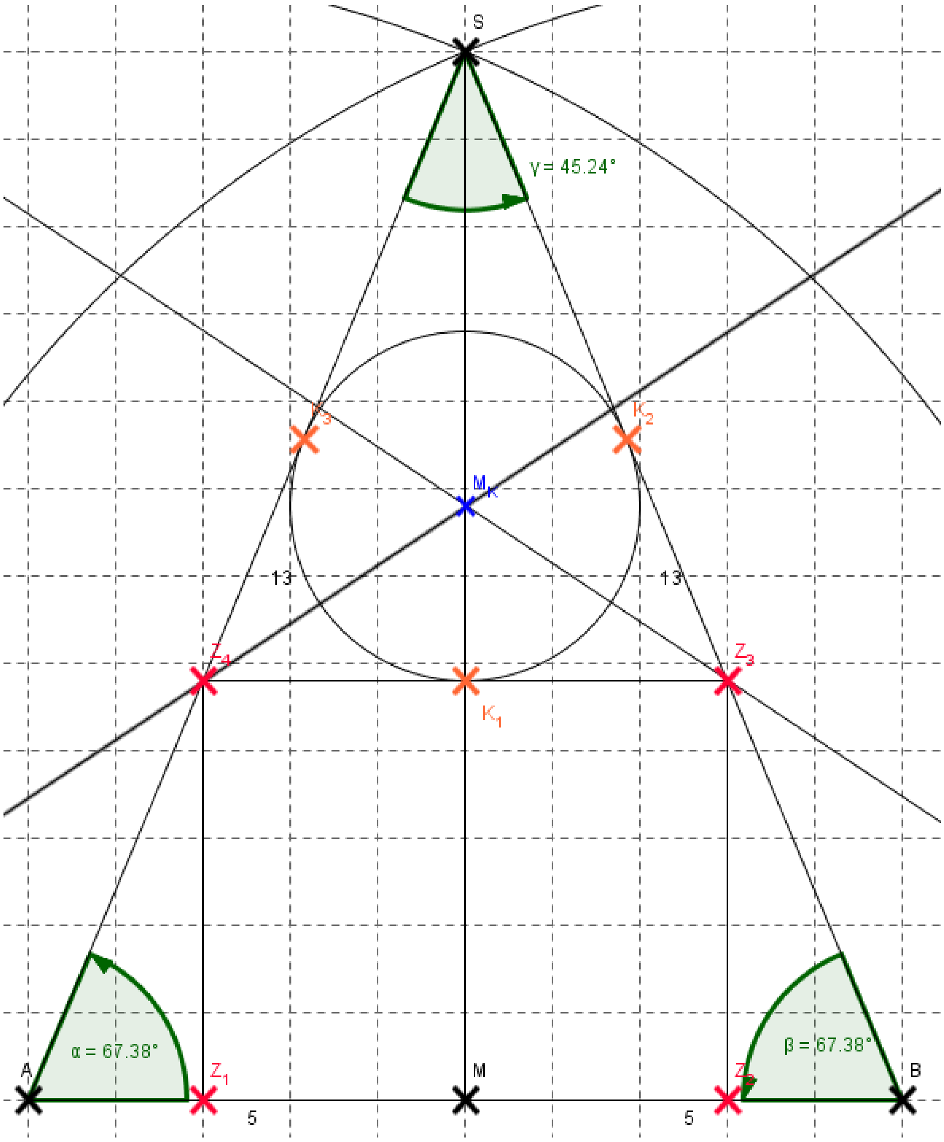
$$\Leftrightarrow M(x) = 2x\ \text{cm}\cdot\pi\cdot\tan 67{,}38°\cdot[(5 - x)\,\text{cm}]$$

$$\Leftrightarrow M(x) = 5\ \text{cm} \cdot 2x\ \text{cm}\cdot\pi\cdot\tan 67{,}38° - x\ \text{cm}\cdot 2x\ \text{cm}\cdot\pi\cdot\tan 67{,}38°$$

$$\Leftrightarrow M(x) = 10\,x \cdot \pi\cdot\tan 67{,}38°\ \text{cm}^2 - 2x^2\cdot\pi\cdot\tan 67{,}38°\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow M(x) = \pi\cdot[24x - 4{,}8x^2]\ \text{cm}^2 = \pi\cdot[-4{,}8x^2 + 24x]\ \text{cm}^2$$

A 3.3



Der Kreis in dem oberen Dreieck ist der Inkreis des Dreiecks Z_4Z_3S. M_K ist also der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.
$O(x) = [1{,}8 \cdot \pi \cdot x^2]\ cm^2$
A 3.4

$\pi \cdot [-4{,}8x^2 + 24x]\ cm^2 = [1{,}8 \cdot \pi \cdot x^2]\ cm^2$
$\Leftrightarrow -4{,}8x^2 + 24x = 1{,}8x^2$
$\Leftrightarrow -6{,}6x^2 + 24x = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4 \cdot (-6{,}6) \cdot 0}}{-13{,}2}$
$= \dfrac{-24 \pm \sqrt{24}}{-13{,}2} \Rightarrow x_1 = 2{,}19$ und $x_2 = 1{,}45 \quad \mathbb{L} = \{1{,}45;\ 2{,}19\}$

A 3.5
$\pi \cdot [-4{,}8x^2 + 24x] = 60\pi$
$\Leftrightarrow -4{,}8x^2 + 24x - 60 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4 \cdot (-4{,}8) \cdot (-60)}}{-9{,}6}$
$= \dfrac{-24 \pm \sqrt{576 - 1152}}{-9{,}6} \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$ da der Wert unter der Wurzel kleiner 0 ist.