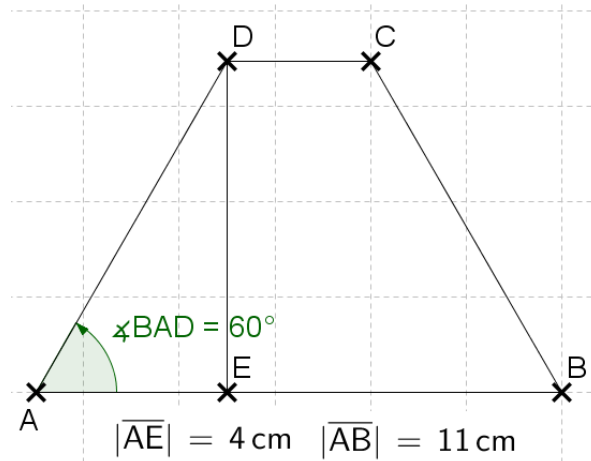


Abschlussprüfung 2022
an den Realschulen in Bayern

Mathematik II Lehrplan+ Haupttermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 18.01.2024

Aufgabe A1 – ohne Taschenrechner



Für den Flächeninhalt brauchen wir: $|\overline{ED}|$ und $|\overline{DC}|$
Dreieck AED:

$$\tan \sphericalangle BAD = \frac{|\overline{ED}|}{|\overline{AE}|} =$$

$$\Leftrightarrow |\overline{ED}| = \tan \sphericalangle BAD \cdot |\overline{AE}| \quad \downarrow \text{Formelsammlung!}$$

$$\Leftrightarrow |\overline{ED}| = \tan 60^\circ \cdot 4 \text{ cm} = \sqrt{3} \cdot 4 \text{ cm} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$|\overline{DC}| = |\overline{AB}| - 2 \cdot |\overline{AE}| \quad (\text{gleichschenkliges Trapez!})$$

$$\Leftrightarrow |\overline{DC}| = 11 \text{ cm} - 2 \cdot 4 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

$$\text{Also: } A = 0,5 \cdot (11 \text{ cm} + 3 \text{ cm}) \cdot 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow A = 7 \text{ cm} \cdot 4\sqrt{3} \text{ cm} = 28\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Aufgabe A2 – ohne Taschenrechner

A 2.1

$$y = -0,5x^2 + bx + c \quad \text{und } S(-2|1,5).$$

Scheitelpunktsform mit $a = -0,5$ und S :

$$y = -0,5(x - (-2))^2 + 1,5$$

$$\Leftrightarrow y = -0,5(x + 2)^2 + 1,5$$

A 2.2

Die Parabel hat durch $a = -0,5$ ein Maximum, ist also nach unten geöffnet. Daher fallen a) und c) direkt raus, da die Wertemenge ein „kleiner gleich“ braucht. Die -2 bezieht sich auf den x -Wert des Scheitelpunkts, wir brauchen aber den y -Wert $1,5$, so dass die Antwort d) $\{y|y \leq 1,5\}$ stimmt!

Aufgabe A3 - ohne Taschenrechner

A 3.1

Es gibt pro Anschlag immer 5 Möglichkeiten (mit zurücklegen, man kann also Tasten mehrfach verwenden), so dass wir für 4 Anschläge rechnen:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625 \text{ bzw. } 5^4 = 625$$

A 3.2

ACDC kann genau 1 mal angeschlagen werden, so dass genau 1 der

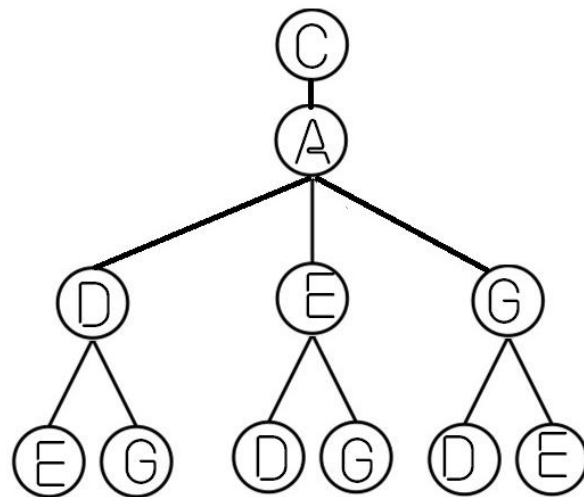
625 Möglichkeiten passt: $\frac{1}{625}$ (= 0,16 %)

A 3.3

Hier gibt es genau 5 Treffer: CCCC DDDD EEEE GGGG AAAA

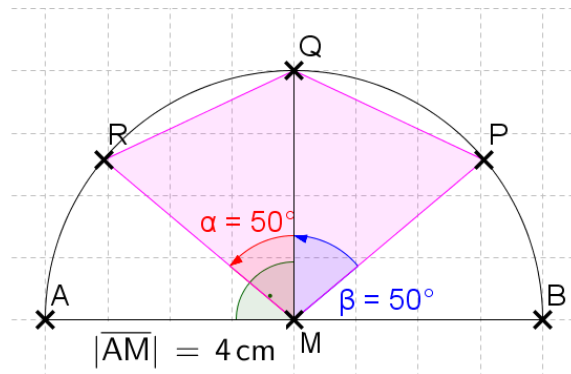
Also: $\frac{5}{625}$ (= 0,80 %)

A 3.4



Aufgabe B1 - mit Taschenrechner

B 1.1



B 1.2

$$|\overline{MR}| = |\overline{MP}| = |\overline{AM}| = 4 \text{ cm}$$

Fehlen also nur noch die gleich langen Streckenlängen von \overline{PQ} und \overline{RQ} :

Kosinussatz im Dreieck MQR:

$$|\overline{RQ}|^2 = |\overline{MR}|^2 + |\overline{MQ}|^2 - 2 \cdot |\overline{MR}| \cdot |\overline{MQ}| \cdot \cos 50^\circ$$

$$\Leftrightarrow |\overline{RQ}|^2 = (4 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot \cos 50^\circ$$

$$\Leftrightarrow |\overline{RQ}|^2 = 11,43 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{RQ}| = 3,38 \text{ cm}$$

$$u = 2 \cdot 4 \text{ cm} + 2 \cdot 3,38 \text{ cm} = 14,76 \text{ cm}$$

B 1.3

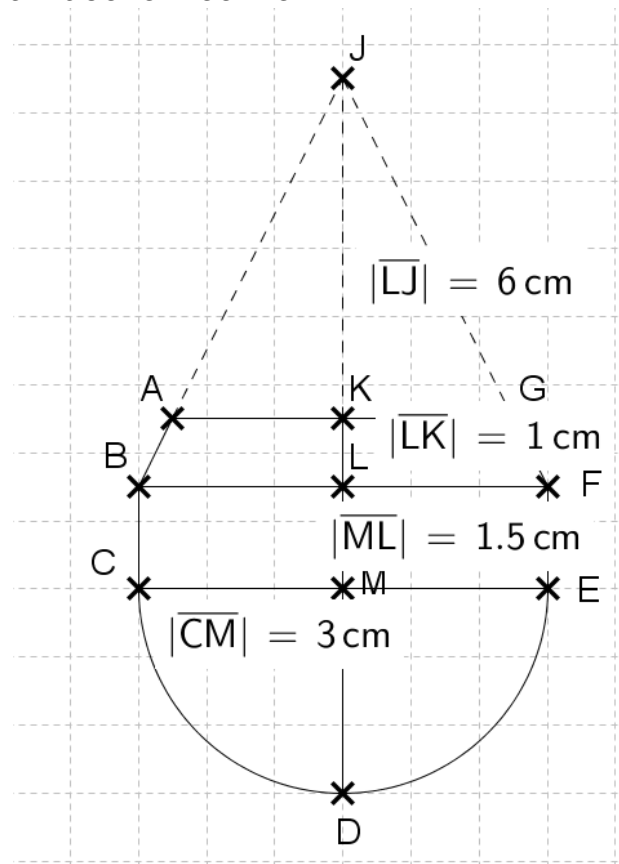
$$u_{\text{Gesamtfigur}} = |\overline{AB}| + 0,5 \cdot 2 \cdot |\overline{AM}| \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow u_{\text{Gesamtfigur}} = 8 \text{ cm} + 0,5 \cdot 2 \cdot 4 \text{ cm} \cdot \pi =$$

$$\Leftrightarrow u_{\text{Gesamtfigur}} = 8 \text{ cm} + 12,56 \text{ cm} = 20,57 \text{ cm}$$

$$\frac{14,76 \text{ cm} \cdot 100 \%}{20,57 \text{ cm}} = 71,75 \%$$

Aufgabe B2 - mit Taschenrechner



Wir brauchen am Ende die 3 Abschnitte unten und müssen den Kegel oben für den Kegelstumpf abziehen.

Vierstreckensatz im Bereich BFJ:

$$\frac{|\overline{AK}|}{|\overline{BL}|} = \frac{|\overline{JK}|}{|\overline{JL}|}$$

$$\Leftrightarrow |\overline{AK}| = \frac{|\overline{JK}| \cdot |\overline{BL}|}{|\overline{JL}|}$$

$$\Leftrightarrow |\overline{AK}| = \frac{(6 - 1) \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 2,5 \text{ cm}$$

Wir machen das mal einzeln, sonst wird's vielleicht zu unübersichtlich ;-)

$$V_{\text{HalbkugelCDE}} = 0,5 \cdot \frac{4}{3} \cdot (3 \text{ cm})^3 \cdot \pi = 56,55 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{ZylinderCEFB}} = (3 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 1,5 \text{ cm} = 42,41 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} V_{\text{KegelstumpfBFGA}} &= \left(\frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 6 \cdot \pi - \frac{1}{3} \cdot 2,5^2 \cdot 5 \cdot \pi\right) \text{ cm}^3 \\ &= 56,55 \text{ cm}^3 - 32,72 \text{ cm}^3 = 23,83 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\text{Damit damit: } V = (56,55 + 42,41 + 23,83) \text{ cm}^3 = 122,79 \text{ cm}^3$$

Aufgabe B3 - mit Taschenrechner
B 3.1 und B 3.2

$P(6|6)$, $Q(8|3)$ und $a = -0,25$ sowie $g: y = \frac{1}{5}x - 1$

Also ab ins Gleichungssystem:

$$\text{I } 6 = -0,25 \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c$$

$$\text{II } 3 = -0,25 \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c$$

$$\text{I } 6 = -9 + 6b + c$$

$$c = 15 - 6b$$

$$\text{II } 3 = -16 + 8b + c$$

$$c = 19 - 8b$$

$$\text{I} = \text{II} \quad 15 - 6b = 19 - 8b$$

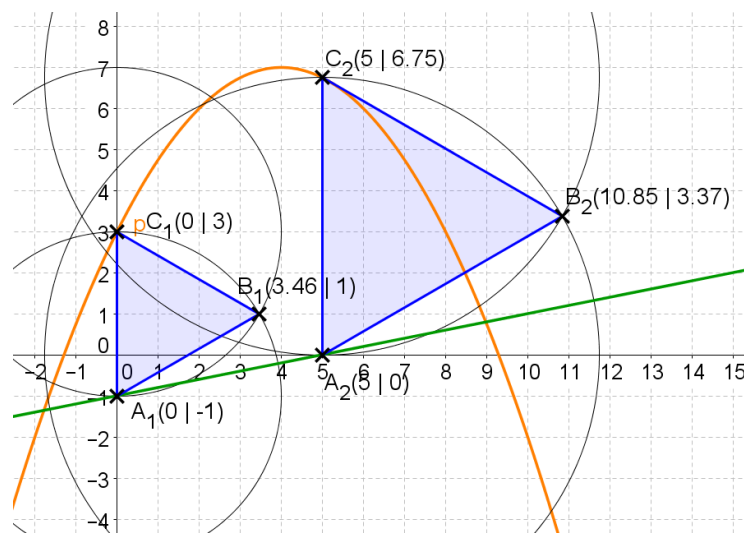
$$2b = 4$$

$$b = 2 \quad b \text{ in I}$$

$$c = 15 - 6 \cdot 2 = 3$$

Damit ist $p: y = -0,25x^2 + 2x + 3$

Wichtige Info aus der Angabe: Die Dreiecke sind gleichschenkelig, so können wir überhaupt erst die Punkte B_n zeichnen ... und wir merken uns schon mal, dass alle Innenwinkel jeweils das Maß 60° haben! Ich habe die Konstruktionskreise in der Zeichnung dringelassen falls es unklar ist, wie man auf die Punkte B_n kommt!



B 3.3

Ein Klassiker: Die Dreiecke existieren nur zwischen den Schnittpunkten von p und g , also gleichsetzen und ab in die Lösungsformel!

$$-0,25x^2 + 2x + 3 = 0,2x - 1$$

$$\Leftrightarrow -0,25x^2 + 1,8x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1,8 \pm \sqrt{1,8^2 - 4 \cdot (-0,25) \cdot 4}}{2 \cdot (-0,25)}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-1,8 \pm \sqrt{7,24}}{-0,5}$$

$$\Rightarrow x_1 = -1,78 \wedge x_2 = 8,98 \quad L = \{-1,78; 8,98\}$$

Damit muss gelten: $-1,78 < x < 8,98$

B 3.4

$$|\overline{A_n C_n}|^2 = \sqrt{(x - x)^2 + (-0,25x^2 + 2x + 3 - (0,2x - 1))^2} \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{A_n C_n}|^2 = \sqrt{(-0,25x^2 + 1,8x + 4)^2} \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{A_n C_n}| = (-0,25x^2 + 1,8x + 4) \text{ cm}$$

B 3.5

Quadratische Ergänzung:

$$T(x) = -0,25(x^2 - 7,2x) + 4$$

$$\Leftrightarrow T(x) = -0,25(x^2 - 7,2x + 3,6^2 - 3,6^2) + 4$$

$$\Leftrightarrow T(x) = -0,25[(x - 3,6)^2 - 12,96] + 4$$

$$\Leftrightarrow T(x) = -0,25(x - 3,6)^2 + 7,24$$

Damit ist die maximale Streckenlänge 7,24 cm für $x = 3,6$

$$A_{\max} = 0,5 \cdot \sin 60^\circ \cdot 7,24 \text{ cm} \cdot 7,24 \text{ cm} = 22,70 \text{ cm}^2$$

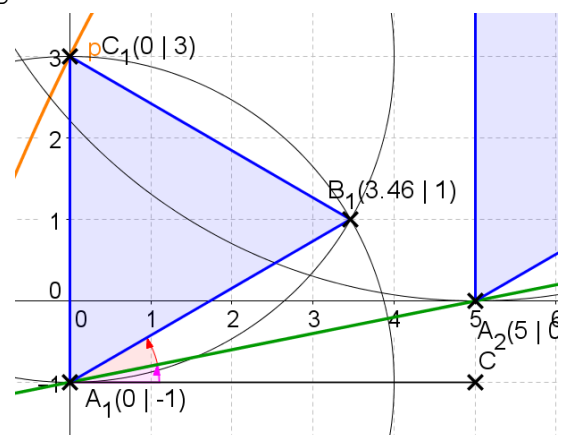
B 3.6

Der gesuchte Winkel ist hier mal in rot eingezeichnet. Wir arbeiten mit der Steigung der Geraden (tan für pinken Winkel!) und dem 60° -Winkel, wie oben schon angedeutet ☺

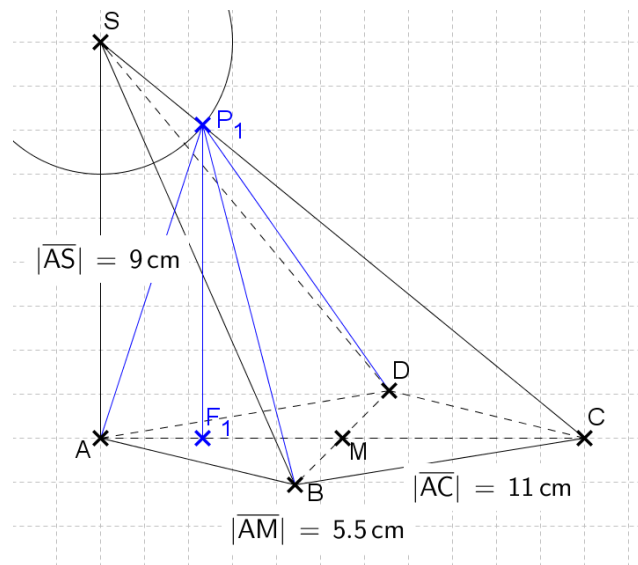
$$\tan \angle \text{PINK} = 0,2$$

$$\Rightarrow \angle \text{PINK} = 11,31^\circ$$

$$\angle \text{ROT} = 90^\circ - 60^\circ - 11,31^\circ = 18,69^\circ$$



Aufgabe B4 - mit Taschenrechner
B 4.1



Pythagoras im Dreieck ACS:

$$|\overline{CS}|^2 = |\overline{AS}|^2 + |\overline{AC}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{CS}|^2 = (9 \text{ cm})^2 + (11 \text{ cm})^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{CS}|^2 = 202 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{CS}| = 14,21 \text{ cm}$$

Tangens im gleichen Dreieck:

$$\tan \sphericalangle SCA = \frac{|\overline{AS}|}{|\overline{AC}|} = \frac{9 \text{ cm}}{11 \text{ cm}} = 0,82 \Rightarrow \sphericalangle SCA = 39,29^\circ$$

B 4.2

Dreieck ACP_1 : MZG

$$|\overline{AP_1}|^2 = |\overline{AC}|^2 + |\overline{CP_1}|^2 - 2 \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{CP_1}| \cdot \cos 39,29^\circ$$

$$\Leftrightarrow |\overline{AP_1}|^2 = (11)^2 + (14,21 - 3)^2 - 2 \cdot 11 \cdot (14,21 - 3) \cdot \cos 39,29^\circ$$

$$\Leftrightarrow |\overline{AP_1}|^2 = 55,79$$

$$\Leftrightarrow |\overline{AP_1}| = 7,47 \quad \text{Also: } |\overline{AP_1}| = 7,47 \text{ cm}$$

Und gleich noch ein Kosinussatz, diesmal im Dreieck AP_1S :

$$|\overline{AS}|^2 = |\overline{AP_1}|^2 + |\overline{SP_1}|^2 - 2 \cdot |\overline{AP_1}| \cdot |\overline{SP_1}| \cdot \cos \sphericalangle SP_1A$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle SP_1A = \frac{|\overline{AS}|^2 - |\overline{AP_1}|^2 - |\overline{SP_1}|^2}{-2 \cdot |\overline{AP_1}| \cdot |\overline{SP_1}|}$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle SP_1A = \frac{(9 \text{ cm})^2 - (7,47 \text{ cm})^2 - (3 \text{ cm})^2}{-2 \cdot 7,47 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}} = -0,36$$

$$\Rightarrow \sphericalangle SP_1A = 111,19^\circ$$

Oder mit dem Sinussatz:

$$\sphericalangle ASP_1 = 180^\circ - 90^\circ - 39,29^\circ = 50,71^\circ$$

$$\frac{\sin \sphericalangle SP_1A}{|\overline{AS}|} = \frac{\sin \sphericalangle ASP_1}{|\overline{AP_1}|}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle SP_1A = \frac{\sin \sphericalangle ASP_1 \cdot |\overline{AS}|}{|\overline{AP_1}|}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle SP_1A = \frac{\sin 50,71^\circ \cdot 9 \text{ cm}}{7,47 \text{ cm}} = 0,93$$

$$(\Rightarrow \sphericalangle SP_1A = 68,82^\circ)$$

Anhand der Zeichnung klar zu erkennen: Wir brauchen den 2. Winkel vom Sinussatz, da der gesuchte Winkel größer als 90° ist. Also: $\Rightarrow \sphericalangle SP_1A = 180^\circ - 68,82^\circ = 111,18^\circ$

B 4.3

Vierstreckensatz im Bereich ACS: MZG

$$\frac{|\overline{F_nP_n}|}{|\overline{AS}|} = \frac{|\overline{CP_n}|}{|\overline{CS}|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\overline{F_nP_n}|}{9} = \frac{(14,21 - x)}{14,21}$$

$$\Leftrightarrow |\overline{F_nP_n}| = \frac{(14,21 - x) \cdot 9}{14,21} = 9 - 0,63x$$

$$\text{Also: } |\overline{F_nP_n}| = (9 - 0,63x) \text{ cm}$$

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot |\overline{BD}| \cdot |\overline{AM}| \cdot |\overline{F_nP_n}|$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 5,5 \text{ cm} \cdot (9 - 0,63x) \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow V(x) = (49,5 - 3,47x) \text{ cm}^3$$

B 4.4

$$V_{\text{gesamt}} = \frac{1}{3} \cdot |\overline{BD}| \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{AS}|$$

$$\Leftrightarrow V_{\text{gesamt}} = \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 11 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} = 99 \text{ cm}^3$$

80 % kleiner bedeutet: Es sind 20 % ☺

$$\text{Also: } 99 \text{ cm}^3 \cdot 0,2 = 19,80 \text{ cm}^3$$

$$-3,47x + 49,5 = 19,80$$

$$\Leftrightarrow -3,47x = -29,70$$

$$\Leftrightarrow x = 8,56 \quad L = \{8,56\}$$

B 4.5

Für das größte Volumen muss gelten: $x = 0$, da so die Höhe die maximale Länge von 9 cm erreicht. Da die Grundfläche immer gleich bleibt können wir feststellen:

Die Grundfläche ABD ist halb so groß wie die Originalgrundfläche ABCD, und damit ist bei gleicher Höhe das Volumen halb so groß.