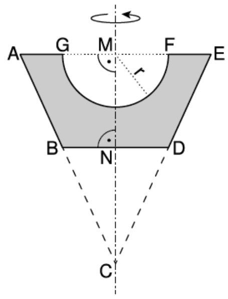
Abschlussprüfung 2022
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Haupttermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 25.12.2022 Schreibweise Lehrplan+

Aufgabe A1
A 1.1
Erstmal orientieren ☺
Der Kerzenhalter ist der Kegelstumpf ABDE
mit einer Halbkugel als Aushöhlung.
Zur Berechnung brauchen wir also:
$|\overline{AM}|$, $|\overline{BN}|$, $|\overline{GM}|$, $|\overline{MN}|$ und $|\overline{MC}|$



$|\overline{AM}| = 9\text{ cm} : 2 = 4{,}5\text{ cm}$

$|\overline{GM}| = 5\text{ cm} : 2 = 2{,}5\text{ cm}$

$|\overline{BN}| = 5\text{ cm} : 2 = 2{,}5\text{ cm}$

$|\overline{MC}| = |\overline{MN}| + |\overline{CN}|$

$\Leftrightarrow\ |\overline{MN}| = |\overline{MC}| - |\overline{CN}|$

Das ist eine Einladung zum Vierstreckensatz, die wir gerne annehmen:

$$\frac{|\overline{CM}|}{|\overline{CN}|} = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{BD}|}$$

$$\Leftrightarrow\ |\overline{CM}| = \frac{|\overline{AE}| \cdot |\overline{CN}|}{|\overline{BD}|}$$

$$\Leftrightarrow\ |\overline{CM}| = \frac{9 \cdot 5{,}5}{5}\text{ cm} = 9{,}90\text{ cm}$$

$$|\overline{MN}| = |\overline{MC}| - |\overline{CN}|$$

$$\Leftrightarrow\ |\overline{MN}| = 9{,}90\text{ cm} - 5{,}5\text{ cm} = 4{,}40\text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot|\overline{AM}|^2\cdot|\overline{CM}|\cdot\pi - \frac{1}{3}\cdot|\overline{BN}|^2\cdot|\overline{CN}|\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot|\overline{GM}|^3\cdot\pi$$

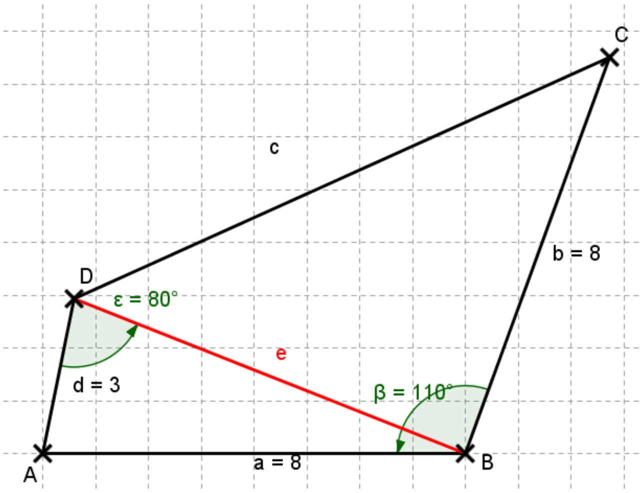
$$\Leftrightarrow\ V = \left(\frac{1}{3}\cdot 4{,}5^2\cdot 9{,}90\cdot\pi - \frac{1}{3}\cdot 2{,}5^2\cdot 5{,}5\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 2{,}5^3\cdot\pi\right)\text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow\ V = 141{,}21\text{ cm}^3$$

A 1.2
$141{,}21 \cdot 2{,}7\text{ g} = 381{,}267\text{ g} = 381\text{ g}$

Aufgabe A2

A 2.1



Sinus-Satz im Dreieck ABD:

$$\frac{\sin \sphericalangle DBA}{|\overline{AD}|} = \frac{\sin \sphericalangle ADB}{|\overline{AB}|}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle DBA = \frac{\sin \sphericalangle ADB \cdot |\overline{AD}|}{|\overline{AB}|}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle DBA = \frac{\sin 80° \cdot 3 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = 0,369$$

Also: $\sphericalangle DBA = 21,67°$ $\mathbb{L} = \{21,67°\}$

Die fehlende Strecke holen wir uns über den Cosinus-Satz im gleichen Dreieck:

$\sphericalangle BAD = 180° - 21,67° - 80° = 78,33°$

$$|\overline{BD}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{AD}|^2 - 2 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \cos \sphericalangle BAD$$

$$\Leftrightarrow |\overline{BD}|^2 = (8 \text{ cm})^2 + (3 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} \cdot \cos 78,33°$$

$$\Leftrightarrow |\overline{BD}|^2 = 63,29 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{BD}| = 7,96 \text{ cm}$$

A 2.2

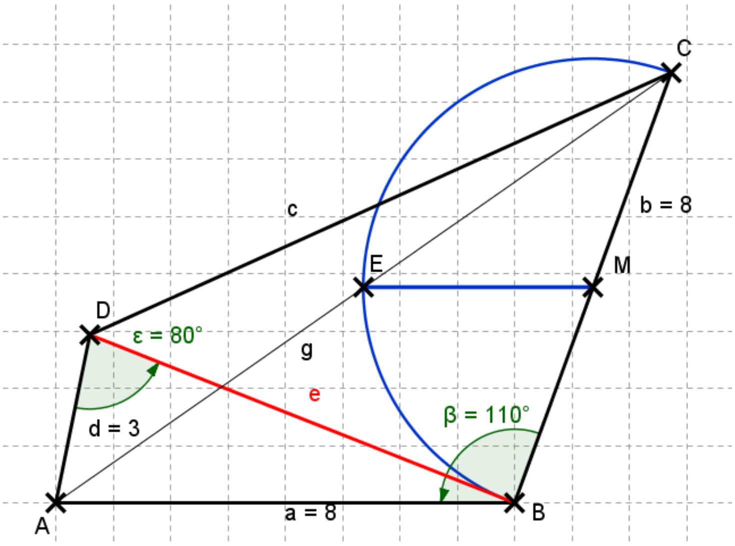
$$A = A_{ABD} + A_{BCD}$$

$$\Leftrightarrow A = 0,5 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \sin \sphericalangle BAD + 0,5 \cdot |\overline{BC}| \cdot |\overline{BD}| \cdot \sin \sphericalangle CBD$$

$$\Leftrightarrow A = 0,5 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} \cdot \sin 78,33° + 0,5 \cdot 8 \text{ cm} \cdot 7,96 \text{ cm} \cdot \sin (110° - 21,67°)$$

$$\Leftrightarrow A = 43,58 \text{ cm}^2$$

A 2.3



A 2.4

Da die Strecke $\overline{EM}$ parallel zu $\overline{AB}$ verläuft, entsteht u.a. ein Z-Winkel. Wir nutzen den Stufenwinkel:
$\sphericalangle CME = \sphericalangle CBA = 110°$ und daher ist $\sphericalangle EMB = 180° - 110° = 70°$.

$|\overline{MB}| = 0{,}5 \cdot |\overline{BC}| = 0{,}5 \cdot 8\ cm = 4\ cm$

$b = 2 \cdot |\overline{MB}| \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle EMB}{360°} = 2 \cdot 4\ cm \cdot \pi \cdot \frac{70°}{360°} = 4{,}89\ cm$

A 2.5

Aha, die Bogenlänge war zum Aufwärmen, um schon mal den richtigen Bereich zu finden ☺

$A = |\overline{MB}|^2 \cdot \pi \cdot \frac{70°}{360°} = (4\ cm)^2 \cdot \pi \cdot \frac{70°}{360°} = 9{,}77\ cm^2$

$\frac{9{,}77\ cm^2 \cdot 100\ \%}{43{,}58\ cm^2} = 22{,}42\ \%$

Aufgabe A3

A 3.1

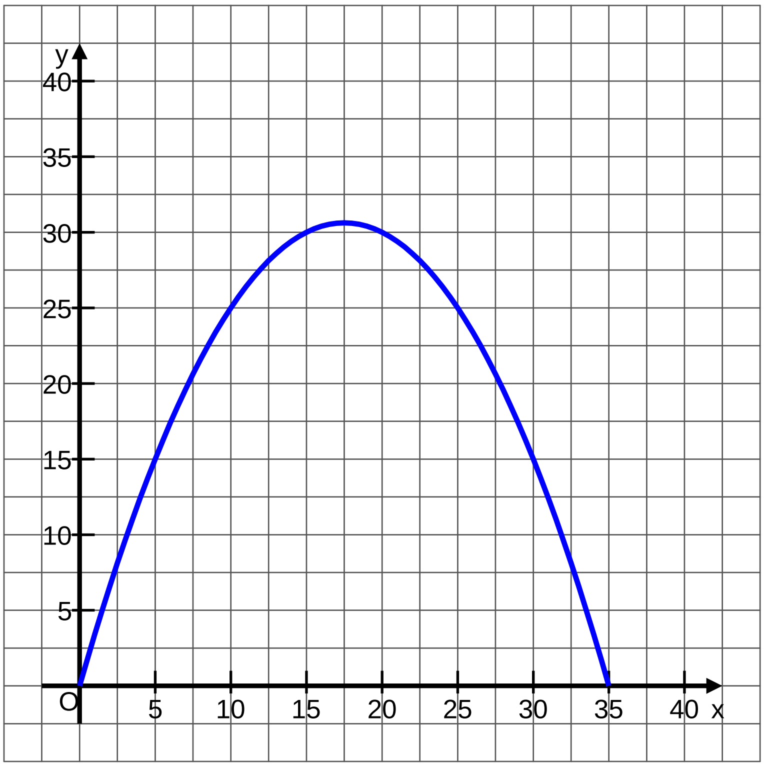
$y = -0{,}1x^2 + 3{,}5x$

$y = -0{,}1(x^2 - 35x + 17{,}5^2 - 17{,}5^2)$

$y = -0{,}1[(x - 17{,}5)^2 - 306{,}25]$

$y = -0{,}1(x - 17{,}5)^2 + 30{,}625$

Damit ist S(17,5 | 30,625) und gleichbedeutend mit: Er erreicht nach 17,5 cm die maximale Sprunghöhe von 30,625 cm.



A 3.2

Maximale Höhe siehe oben: 30,625 cm

Sprungweite: 35 cm

A 3.3

Berechnen wir mal den “Sprungfaktor”:

$3\text{ mm} \cdot x = 600\text{ mm}$

$\Leftrightarrow\ x = 600\text{ mm} : 3\text{ mm} = 200$

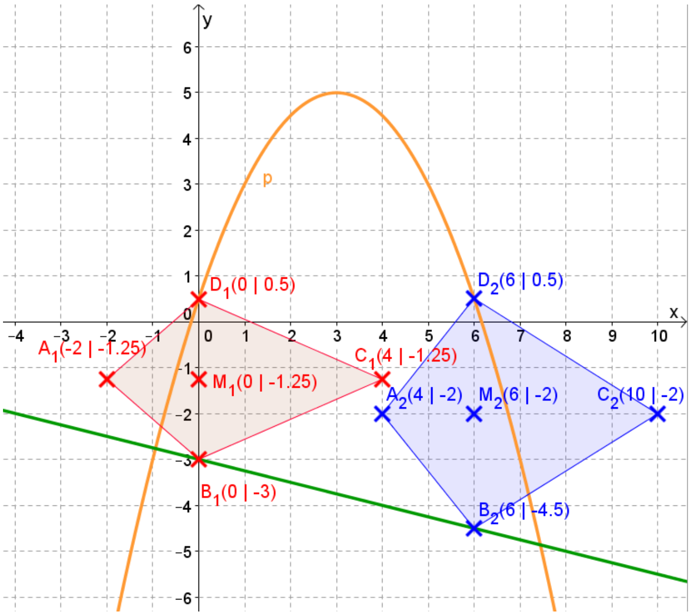
Ein Floh kann also 200 mal so weit wie seine Größe springen.
Bei einem Mensch wären das: 1,80 m · 200 = 360 m

Aufgabe B1:
B 1.1 und B 1.2
$S(3|5)$ und $p: y = -0{,}5x^2 + bx + c$

Scheitelform mit S und a:

$$y = -0{,}5(x - 3)^2 + 5$$
$$\Leftrightarrow y = -0{,}5(x^2 - 6x + 9) + 5$$
$$\Leftrightarrow y = -0{,}5x^2 + 3x - 4{,}5 + 5$$
$$\Leftrightarrow y = -0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$$

$p: y = -0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$
$g: y = -0{,}25x - 3$



B 1.3
Beide Dreiecke haben die gleiche Grundlinie $\overline{B_nD_n}$, wir müssen also die Höhen betrachten. Und hier gilt laut Angabe, dass $|\overline{M_nC_n}| = 4$ cm und $|\overline{M_nA_n}| = 2$ cm ist und mithin die eine Höhe doppelt so groß wie die andere ist, woraus der doppelt so große Flächeninhalt folgt.
Wir können an der Stelle auch schon mal festhalten, dass $|\overline{A_nC_n}| = 4 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 6$ cm ist.

B 1.4
Offensichtlich nur der Bereich innerhalb der Schnittpunkte von g und p. Also gleichsetzen, nach Null auflösen und ab dafür in die Lösungsformel!

$$-0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5 = -0{,}25x - 3$$
$$\Leftrightarrow -0{,}5x^2 + 3{,}25x + 3{,}5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-3{,}25 \pm \sqrt{3{,}25^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot 3{,}5}}{2 \cdot (-0{,}5)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-3{,}25 \pm \sqrt{17{,}5625}}{-1}$$

$\Rightarrow \quad x_1 = -0{,}94 \wedge x_2 = 7{,}44 \quad \mathbb{L} = \{-0{,}94;\ 7{,}44\}$

Damit muss gelten: $-0{,}94 < x < 7{,}44$

B 1.5

$|\overline{A_nC_n}| = 6$ cm

$$|\overline{B_nD_n}|^2 = \sqrt{(x - x)^2 + (-0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5 - (-0{,}25x - 3))^2}\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{B_nD_n}|^2 = \sqrt{(-0{,}5x^2 + 3{,}25x + 3{,}5)^2}\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{B_nD_n}|\ (-0{,}5x^2 + 3{,}25x + 3{,}5)\ \text{cm}$$

$$A(x) = 0{,}5 \cdot 6\ \text{cm} \cdot (-0{,}5x^2 + 3{,}25x + 3{,}5)\ \text{cm}$$

$$\Leftrightarrow \quad A(x) = (-1{,}5x^2 + 9{,}75x + 10{,}5)\ \text{cm}^2$$

Und nun noch der Klassiker: Quadratische Ergänzung!

$$A(x) = -1{,}5(x^2 - 6{,}5x + 3{,}25^2 - 3{,}25^2) + 10{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad A(x) = -1{,}5[(x - 3{,}25)^2 - 10{,}5625] + 10{,}5$$

$$\Leftrightarrow \quad A(x) = -1{,}5(x - 3{,}25)^2 + 26{,}34375$$

Damit ist für $x = 3{,}25$ der max. Flächeninhalt $A_{max} = 26{,}34$ cm²

B 1.6

Letzte Aufgabe – Knobelaufgabe!

$|\overline{M_nC_n}| = 4$ cm

Wenn wir uns den Thaleskreis vorstellen mit $r = 4$ cm, muss die Grundlinie $|\overline{B_nD_n}| = 8$ cm sein, damit ein rechter Winkel entstehen kann. Dieser ist „genau in der Mitte“, da das Drachenviereck hier ein gleichschenkliges Dreieck hat.

Der Rest ist jetzt leicht, da man nur noch die Strecke mit 8 gleichsetzen muss. Also:

$$-0{,}5x^2 + 3{,}25x + 3{,}5 = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad -0{,}5x^2 + 3{,}25x - 4{,}5 = 0$$

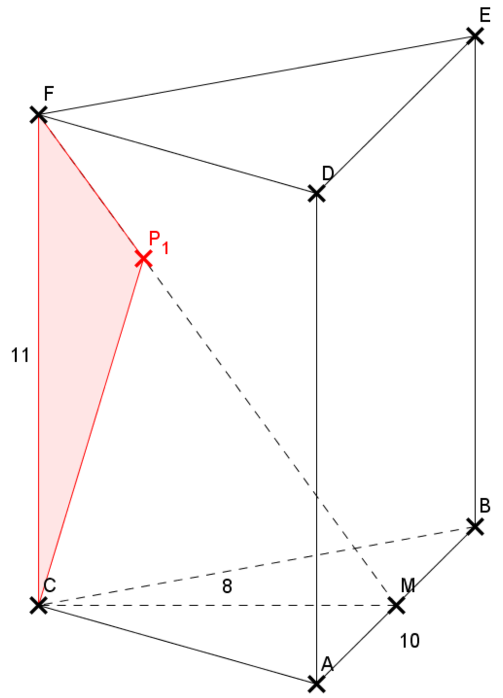
Noch ne Runde Lösungsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-3{,}25 \pm \sqrt{3{,}25^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-4{,}5)}}{2 \cdot (-0{,}5)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-3{,}25 \pm \sqrt{1{,}5625}}{-1}$$

$\Rightarrow \quad x_1 = 2 \wedge x_2 = 4{,}5 \quad \mathbb{L} = \{2;\ 4{,}5\}$

Aufgabe B2
B 2.1 und B 2.2



Dreieck CMF:

$$|\overline{FM}|^2 = |\overline{CM}|^2 + |\overline{CF}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{FM}|^2 = (8\text{ cm})^2 + (11\text{ cm})^2 = 185\text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{FM}| = 13{,}60\text{ cm}$$

$$\tan \sphericalangle CFM = \frac{|\overline{CM}|}{|\overline{CF}|} = \frac{8\text{ cm}}{11\text{ cm}} = 0{,}73$$

$$\Rightarrow \sphericalangle CFM = 36{,}03°$$

$$A = 0{,}5 \cdot |\overline{CF}| \cdot |\overline{FP_1}| \cdot \sin \sphericalangle CFM$$

$$\Leftrightarrow A = 0{,}5 \cdot 11\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot \sin 36{,}03° = 12{,}94\text{ cm}^2$$

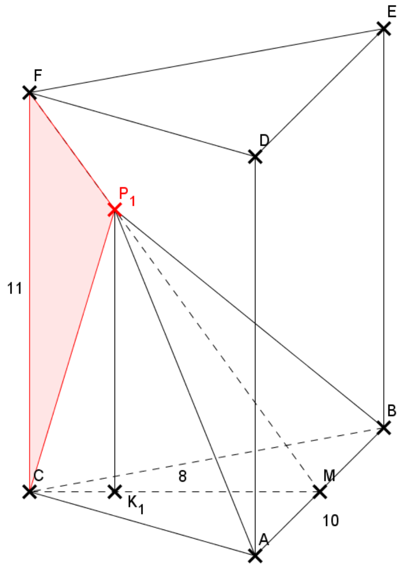
$$|\overline{CP_1}|^2 = |\overline{CF}|^2 + |\overline{FP_1}|^2 - 2 \cdot |\overline{CF}| \cdot |\overline{FP_1}| \cdot \cos \sphericalangle CFM$$

$$\Leftrightarrow |\overline{CP_1}|^2 = (11\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2 - 2 \cdot 11\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot \cos 36{,}03°$$

$$\Leftrightarrow |\overline{CP_1}|^2 = 65{,}83\text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{CP_1}| = 8{,}11\text{ cm}$$

B 2.3 und B 2.4



Vierstreckensatz im Bereich CMF:

$$\frac{|\overline{K_nP_n}|}{|\overline{CF}|} = \frac{|\overline{MP_n}|}{|\overline{MF}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{K_nP_n}| = \frac{|\overline{MP_n}| \cdot |\overline{CF}|}{|\overline{MF}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{K_nP_n}| = \frac{(13{,}60 - x) \cdot 11}{13{,}60} \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overline{K_nP_n}| = \frac{149{,}6 - 11x}{13{,}60} \text{ cm}$$

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot |\overline{K_nP_n}|$$

$$\Leftrightarrow \quad V(x) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{MC}| \cdot |\overline{K_nP_n}| \text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow \quad V(x) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{149{,}6 - 11x}{13{,}60} \text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow \quad V(x) = (146{,}67 - 10{,}78x) \text{ cm}^3 \quad [146{,}67 - 10{,}80x] \text{ cm}^3$$

B 2.5

$$V_{Prisma} = A_{ABC} \cdot |\overline{CF}|$$

$$\Leftrightarrow \quad V_{Prisma} = 0{,}5 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{MC}| \cdot |\overline{CF}|$$

$$\Leftrightarrow \quad V_{Prisma} = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 11 \text{ cm}^3 = 440 \text{ cm}^3$$

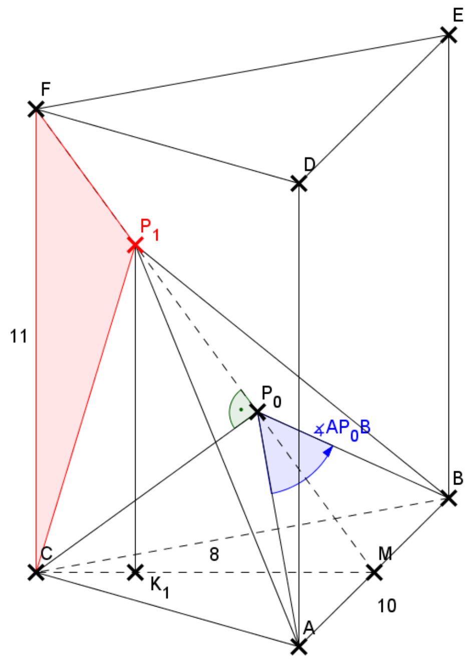
$$440 \text{ cm}^3 \cdot 0{,}15 = 66 \text{ cm}^3$$

$$146{,}67 - 10{,}80x = 66$$

$$\Leftrightarrow \quad 10{,}80x = 80{,}67$$

$\Leftrightarrow\ x = 7{,}47 \qquad L = \{7{,}47\}$

B 2.6



Dreieck CP_0F:

$$\tan \sphericalangle CFP_0 = \frac{x}{|\overline{CF}|}$$

$\Leftrightarrow\ x = \tan \sphericalangle CFP_0 \cdot |\overline{CF}| = \tan 36{,}03° \cdot 11\text{ cm} = 8{,}90\text{ cm}$

$|\overline{P_0M}| = |\overline{FM}| - x = 13{,}60\text{ cm} - 8{,}90\text{ cm} = 4{,}70\text{ cm}$

Dreieck AMP_0:

$$\tan \sphericalangle AP_0M = \frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MP_0}|} = \frac{5\text{ cm}}{4{,}70\text{ cm}} = 1{,}06$$

$\Rightarrow\ \sphericalangle AP_0M = 46{,}77°$

Und damit ist $\sphericalangle AP_0B = 46{,}77° \cdot 2 = 93{,}54°$