Abschlussprüfung 2019
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Haupttermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 07.05.2021

Aufgabe A1
A 1.1
Kosinus-Satz im Dreieck ABC:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \sphericalangle ACB$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle ACB = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{-2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle ACB = \frac{(95\text{ cm})^2 - (150\text{ cm})^2 - (75\text{ cm})^2}{-2 \cdot (150\text{ cm}) \cdot (75\text{ cm})} = 0{,}85$$

$$\Rightarrow \sphericalangle ACB = 31{,}91° \approx 32°$$

A 1.2
Kosinus-Satz im Dreieck BCD:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{DC} \cdot \cos 2 \cdot \sphericalangle ACB$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = (75\text{ cm})^2 + (75\text{ cm})^2 - 2 \cdot 75\text{ cm} \cdot 75\text{ cm} \cdot \cos 64°$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 6318{,}32\text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 79{,}49\text{ cm} \approx 79\text{ cm}$$

$$A = 0{,}5 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC} = 0{,}5 \cdot 79\text{ cm} \cdot 150\text{ cm} = 5925\text{ cm}^2$$

A 1.3
$A_{geplant} = 5925\text{ cm}^2$
$A_{Baumarktproblem} = 0{,}5 \cdot 79\text{ cm} \cdot 100\text{ cm} = 3950\text{ cm}^2$

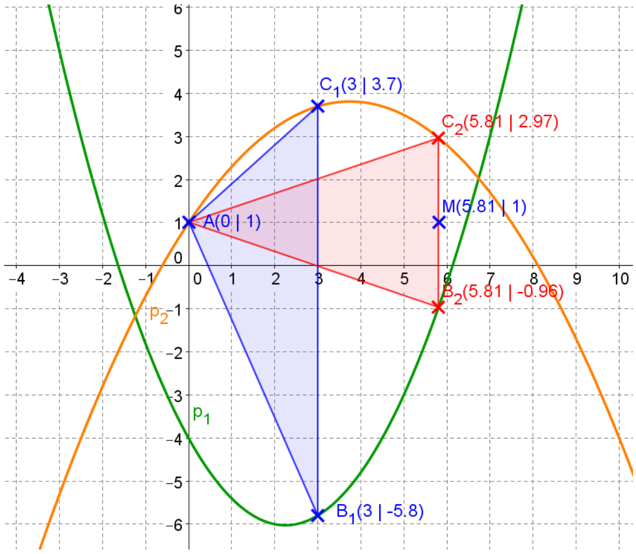
$5925\text{ cm}^2 - 3950\text{ cm}^2 = 1975\text{ cm}^2$

$$\frac{1975\text{ cm}^2 \cdot 100\ \%}{5925\text{ cm}^2} = 33{,}33\ \%$$

Also die 2. Antwortkreuzelmöglichkeit.

Aufgabe A2

p_1: $y = 0,4x^2 - 1,8x - 4$ **p_1: $y = -0,2x^2 + 1,5x + 1$**



A 2.1

$$\overline{B_nC_n}(x) = \sqrt{(x - x)^2 + (-0,2x^2 + 1,5x + 1 - (0,4x^2 - 1,8x - 4))^2}\ \text{LE}$$

$$\Leftrightarrow \overline{B_nC_n}(x) = \sqrt{(-0,2x^2 + 1,5x + 1 - 0,4x^2 + 1,8x + 4)^2}\ \text{LE}$$

$$\Leftrightarrow \overline{B_nC_n}(x) = (-0,6x^2 + 3,3x + 5)\ \text{LE}$$

A 2.2

Suchen wir mal die längstmögliche Strecke. Ist diese kleiner als 10 haben wir gewonnen :-)
Andere Variante: Gleichsetzen mit 10, Lösungsformel, Diskriminante kleiner 0.

$$T_{max} = -0,6(x^2 + 5,5x) + 5$$

$$\Leftrightarrow T_{max} = -0,6(x^2 + 5,5x + 2,75^2 - 2,75^2) + 5$$

$$\Leftrightarrow T_{max} = -0,6[(x - 2,75)^2 - 7,5625] + 5$$

$$\Leftrightarrow T_{max} = -0,6[(x - 2,75)^2 + 9,5375$$

Damit ist für x = 2,75 die maximale Streckenlänge 9,5375 cm, und das ist kleiner 10 cm. Daher gibt es auch keine Strecke mit der Länge 10 cm.

A 2.3

Mittelpunkt einer Strecke mit der Formel aus der 7. Klasse:

$$y_M = \frac{0,4x^2 - 1,8x - 4 + (-0,2x^2 + 1,5x + 1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow y_M = \frac{0,4x^2 - 1,8x - 4 - 0,2x^2 + 1,5x + 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y_M = \frac{0,2x^2 - 0,3x - 3}{2} = 0,1x^2 - 0,15x - 1,5$$

A 2.4
In der Zeichnung habe ich das entsprechende Dreieck ergänzt. M_2 muss die gleiche y-Koordiante wie A haben, also 1.

$$0{,}1x^2 - 0{,}15x - 1{,}5 = 1$$
$$\Leftrightarrow 0{,}1x^2 - 0{,}15x - 2{,}5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{0{,}15 \pm \sqrt{(-0{,}15)^2 - 4 \cdot 0{,}1 \cdot (-2{,}5)}}{2 \cdot 0{,}1} = \frac{0{,}15 \pm \sqrt{1{,}0225}}{0{,}2}$$

$\Rightarrow x_1 = 5{,}81$ und $x_2 = -4{,}31$ $\mathbb{L} = \{5{,}81\}$ und damit $M_2(5{,}81|1)$

Aufgabe A3
3.1
Dreieck AMS:

$$\tan \sphericalangle ASM = \frac{\overline{AM}}{\overline{MS}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MS} = \frac{\overline{AM}}{\tan \sphericalangle ASM} = \frac{21\text{ cm}}{\tan 16°} = 73{,}2\text{ cm}$$

$$\overline{SO} = \overline{MS} - \overline{MN} + \overline{ON} = 73{,}2\text{ cm} - 45\text{ cm} + 5\text{ cm} = 33{,}2\text{ cm}$$

Vierstreckensatz im Dreieck ABS:

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{SM}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{HC} = \frac{\overline{SO} \cdot \overline{AB}}{\overline{SM}} = \frac{33{,}2\text{ cm} \cdot 42\text{ cm}}{73{,}2\text{ cm}} = 19{,}0\text{ cm}$$

A 3.2
$V = V_{Kegelstumpf} + V_{Zylinder}$

$$V_{Kegelstumpf} = V_{Kegel} - V_{fehlenderKegel}$$
$$\Leftrightarrow V_{Kegelstumpf} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AM}^2 \cdot \pi \cdot \overline{MS} - \frac{1}{3} \cdot \overline{HO}^2 \cdot \pi \cdot \overline{SO}$$
$$V_{Zylinder} = \overline{GO}^2 \cdot \pi \cdot \overline{ON}$$

Und jetzt der ganze Wurm:

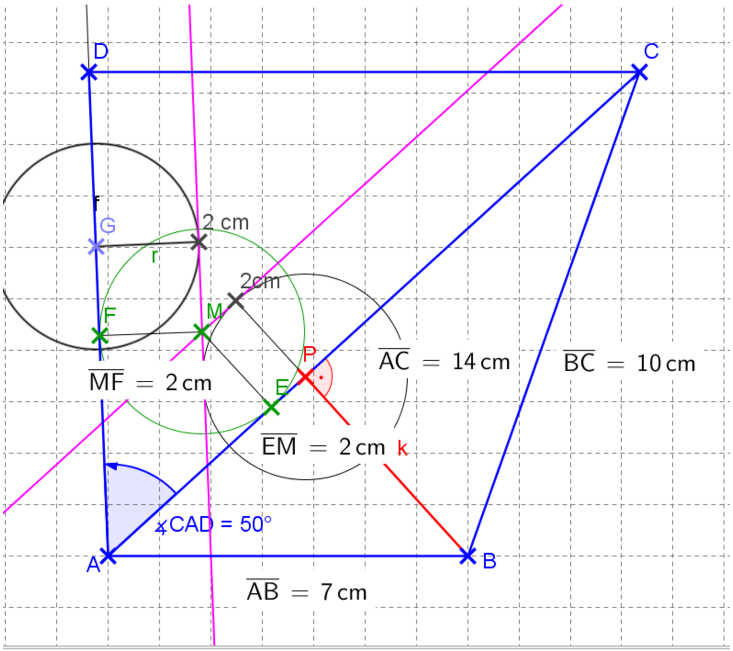
$$V = \frac{1}{3} \cdot \overline{AM}^2 \cdot \pi \cdot \overline{MS} - \frac{1}{3} \cdot \overline{HO}^2 \cdot \pi \cdot \overline{SO} + \overline{GO}^2 \cdot \pi \cdot \overline{ON}$$

$$\Leftrightarrow V = \left(\frac{1}{3} \cdot 21^2 \cdot \pi \cdot 73{,}2 - \frac{1}{3} \cdot 9{,}5^2 \cdot \pi \cdot 33{,}2 + 21^2 \cdot \pi \cdot 5\right)\text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow V = 33804{,}8\text{ cm}^3 - 3137{,}7\text{ cm}^3 + 6927{,}2\text{ cm}^3 = 37594{,}3\text{ cm}^3$$

Aufgabe B1

B 1.1



Kosinus-Satz im Dreieck ABC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \sphericalangle CBA$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle CBA = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{-2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle CBA = \frac{(14\ cm)^2 - (7\ cm)^2 - (10\ cm)^2}{-2 \cdot (7\ cm) \cdot (10\ cm)} = -0{,}34$$

$$\Rightarrow \sphericalangle CBA = 109{,}62°$$

Und gleich nochmal!

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \sphericalangle BAC$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle BAC = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{-2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle BAC = \frac{(10\ cm)^2 - (7\ cm)^2 - (14\ cm)^2}{-2 \cdot (7\ cm) \cdot (14\ cm)} = 0{,}74$$

$\Rightarrow \sphericalangle BAC = 42{,}29°$ (Aufgabensteller mit Sinus-Satz 42,28°)

B 1.2

Der Abstand zaubert uns bei P einen rechten Winkel. Also „easy going“:

$$\sin \sphericalangle BAC = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BP} = \sin \sphericalangle BAC \cdot \overline{AB} = \sin 42{,}28° \cdot 7\ cm = 4{,}71\ cm$$

$$\cos \sphericalangle BAC = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AP} = \cos \sphericalangle BAC \cdot \overline{AB} = \cos 42{,}28° \cdot 7\ cm = 5{,}18\ cm$$

Also ist $u = 4{,}71\ cm + 5{,}18\ cm + 7\ cm = 16{,}89\ cm$

B 1.3

$\sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC = 42{,}28°$ (Z-Winkel)

$\sphericalangle ADC = 180° - 42{,}28° - 50° = 87{,}72°$

Sinus-Satz:

$$\frac{\overline{DC}}{\sin \sphericalangle CAD} = \frac{\overline{AC}}{\sin \sphericalangle ADC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{DC} = \frac{\overline{AC} \cdot \sin \sphericalangle CAD}{\sin \sphericalangle ADC} = \frac{14\ cm \cdot \sin 50°}{\sin 87{,}72°} = 10{,}73\ cm$$

$$A = A_{ABC} + A_{ACD}$$

$$\Leftrightarrow A = 0{,}5 \cdot \sin \sphericalangle CBA \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} + 0{,}5 \cdot \sin \sphericalangle DCA \cdot \overline{DC} \cdot \overline{AC}$$

$$\Leftrightarrow A = (0{,}5 \cdot \sin 109{,}62° \cdot 7 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot \sin 42{,}28° \cdot 10{,}73 \cdot 14)\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow A = 83{,}50\ cm^2$$

(Aufgabensteller $83{,}51\ cm^2$ mit der Trapezformel, dafür muss man sich die Höhe basteln, z. B. beim Punkt B senkrecht nach oben [$h = 9{,}42\ cm$]. Man kann auch die Fläche des oberen Dreiecks mit $\overline{AD} = 9{,}43\ cm$ berechnen.)

B 1.4

Konstruktion über die Parallelen zu [AC] und [AD] im Abstand von jeweils 2 cm. Daher ist die Zeichnung leider „leicht“ chaotisch geworden!

$A_{Kreis} = (2\ cm)^2 \cdot \pi = 12{,}57\ cm^2$

$$\frac{12{,}57\ cm^2 \cdot 100\ \%}{83{,}51\ cm^2} = 15{,}05\ \%$$

B 1.5
Finale! Man muss erkennen, dass da ein Drachenviereck drinsteckt, dann ist es eigentlich recht einfach ;-)

Vorgehen: $A_{DracheAEMF} - A_{SektorMFE}$
$\sphericalangle FME = 360° - 90° - 90° - 50° = 130°$

$A_{SektorMFE} = (2\ cm)^2 \cdot \pi \cdot \frac{130°}{360°} = 4{,}54\ cm^2$

Drachenviereck:
Dreieck AEM:

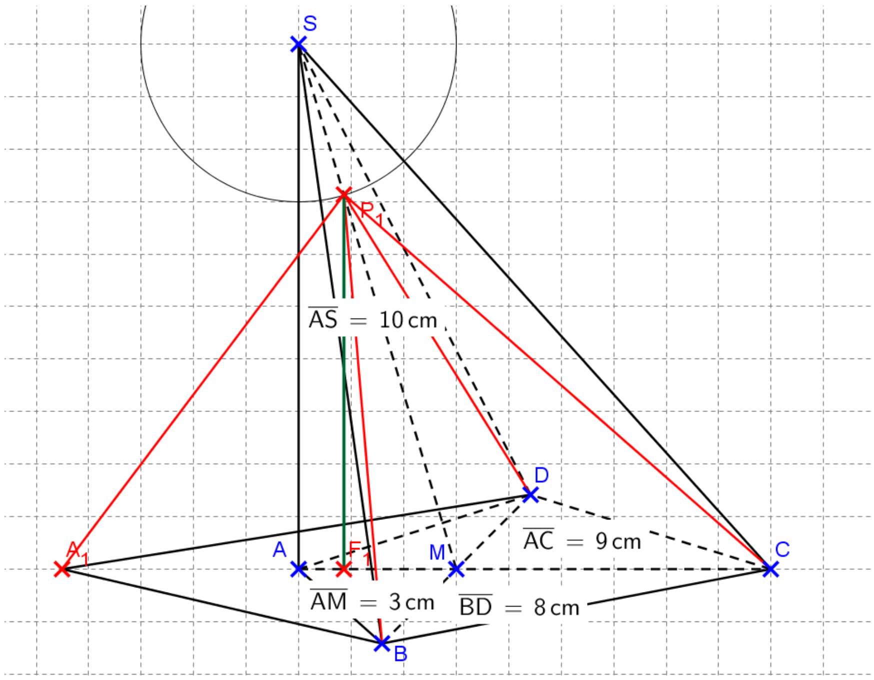
$$\tan \sphericalangle EAM = \frac{\overline{EM}}{\overline{AE}}$$

$$\overline{AE} = \frac{\overline{EM}}{\tan \sphericalangle EAM} = \frac{2\ cm}{\tan 25°} = 4{,}29\ cm$$

$A_{AEM} = 0{,}5 \cdot 2\ cm \cdot 4{,}29\ cm = 4{,}29\ cm^2$
Und damit ist $A_{Drache} = 4{,}29\ cm^2 \cdot 2 = 8{,}58\ cm^2$

Damit $A_{gesucht} = 8{,}58\ cm^2 - 4{,}54\ cm^2 = 4{,}04\ cm^2$

Aufgabe B2:
B 2.1 und B 2.2



Pythagoras im Dreieck AMS:

$$\overline{MS}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AS}^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{MS}^2 = (3\ cm)^2 + (10\ cm)^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{MS}^2 = 109\ cm^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{MS} = 10{,}44\ cm$$

Dreieck AMS:

$\tan \sphericalangle SMA = \frac{\overline{AS}}{\overline{AM}} = \frac{10\ cm}{3\ cm} = 3{,}33 \Rightarrow \sphericalangle SMA = 73{,}30°$

B 2.3

$\overline{P_1M} = 10{,}44\ cm - 3\ cm = 7{,}44\ cm$

$\overline{A_1M} = 3\ cm + 4{,}5\ cm = 7{,}5\ cm$

Kosinus-Satz im Dreieck A_1MP_1:

$\overline{A_1P_1}^2 = \overline{A_1M}^2 + \overline{P_1M}^2 - 2 \cdot \overline{A_1M} \cdot \overline{P_1M} \cdot \cos \sphericalangle CBA$

$\Leftrightarrow \overline{A_1P_1}^2 = (7{,}5\ cm)^2 + (7{,}44\ cm)^2 - 2 \cdot 7{,}5\ cm \cdot 7{,}44\ cm \cdot \cos 73{,}30°$

$\Leftrightarrow \overline{A_1P_1}^2 = 79{,}53\ cm^2$

$\Leftrightarrow \overline{A_1P_1} = 8{,}92\ cm$

Sinus-Satz im Dreieck A_1MP_1:

$\frac{\sin \sphericalangle MA_1P_1}{\overline{P_1M}} = \frac{\sin \sphericalangle SMA}{\overline{A_1P_1}}$

$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle MA_1P_1M = \frac{\sin \sphericalangle SMA \cdot \overline{P_1M}}{\overline{A_1P_1}}$

$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle MA_1P_1M = \frac{\sin 73{,}30° \cdot 7{,}44\ cm}{8{,}92\ cm} = 0{,}80$

$\Rightarrow \sphericalangle MA_1P_1M = 53{,}03°$ $(126{,}97°$ zu groß (Zeichnung)$)$ $\mathbb{L} = \{53{,}03°\}$

B 2.4

Vierstreckensatz im Dreieck MSA für die Höhe (Zentrum ist M!):

$\frac{\overline{P_nF_n}(x)}{\overline{AS}} = \frac{\overline{MP_n}}{\overline{SM}}$

$\Leftrightarrow \overline{P_nF_n}(x) = \frac{\overline{MP_n} \cdot \overline{AS}}{\overline{SM}}$

$\Leftrightarrow \overline{P_nF_n}(x) = \frac{(10{,}44 - x) \cdot 10}{10{,}44}\ cm = (10 - 0{,}96x)\ cm$

Oder viel leichter: Sinus im Dreieck F_nMP_n:

$\sin \sphericalangle SMA = \frac{\overline{P_nF_n}(x)}{\overline{P_nM}}$

$\Leftrightarrow \overline{P_nF_n}(x) = \sin \sphericalangle SMA \cdot \overline{P_nM}$

$\Leftrightarrow \overline{P_nF_n}(x) = \sin 73{,}30° \cdot (10{,}44 - x)\ cm = (10 - 0{,}96x)\ cm$

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{A_nC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{P_nF_n}(x)$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (9 + 1{,}5x) \cdot 8 \cdot (10 - 0{,}96x)\ cm^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{8}{6} \cdot (9 + 1{,}5x) \cdot (10 - 0{,}96x)\ cm^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = (-1{,}92x^2 + 8{,}48x + 120)\ cm^3$$

B 2.5

$$V_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AS}$$

$$\Leftrightarrow V_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9\ cm \cdot 8\ cm \cdot 10\ cm = 120\ cm^2$$

$$V_{max} = -1{,}92(x^2 - 4{,}42x) + 120$$

$$\Leftrightarrow V_{max} = -1{,}92(x^2 - 4{,}42x + 2{,}21^2 - 2{,}21^2) + 120$$

$$\Leftrightarrow V_{max} = -1{,}92[(x - 2{,}21)^2 - 4{,}8841] + 120$$

$$\Leftrightarrow V_{max} = -1{,}92(x - 2{,}21)^2 + 129{,}38$$

Damit ist für $x = 2{,}21$ das maximale Volumen $V = 129{,}38\ cm^3$ (Musterlösung: $129{,}36\ cm^3$)

$$129{,}36\ cm^3 - 120\ cm^3 = 9{,}36\ cm^3$$

$$\frac{9{,}36\ cm^3 \cdot 100\ \%}{120\ cm^3} = 7{,}80\ \%$$

B 2.6

A fällt raus, da V_{max} für $x = 0$ gelten müsste.

C fällt raus, da hier V_{max} irgendwo bei $x = 3$ liegt, es aber bei $x = 2{,}21$ (siehe B 2.5) liegen müsste. Ebenso müsste für $x = 0$ dann $V = 120\ cm^3$ gelten, was nicht der Fall ist.