Abschlussprüfung 2016
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Nachtermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 28.06.2019

Aufgabe A1

A 1.1 und 1.2

x	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0
$\frac{3}{x}$	6,00	3,00	1,50	1,00	0,75	0,60	0,50	0,38

A 1.3

Für eine Streckenlänge $\overline{A_2B_2} = 6$ LE muss gelten: Der y-Wert von A_2 muss $y = 5$ sein. Also:

$$y = \frac{3}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 = \frac{3}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \mathbb{L} = \{0{,}6\}$$

Aufgabe A2

A 2.1

10 min ≙ 121 Umdrehungen

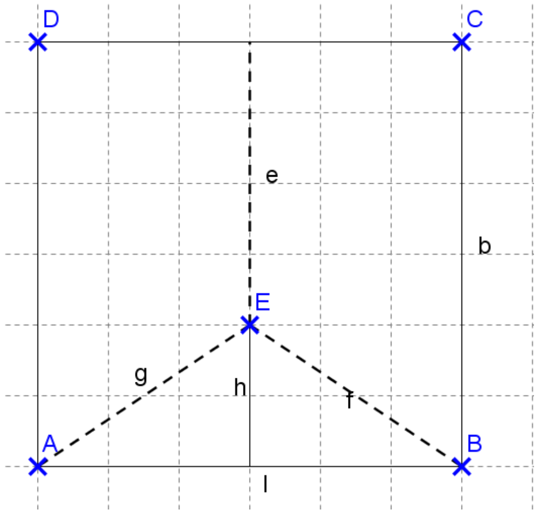
60 min ≙ 726 Umdrehungen

$u = 2 \cdot r \cdot \pi$

$\Leftrightarrow u = 2 \cdot 82 \text{ m} \cdot \pi = 515{,}22 \text{ m}$ (ungerundet im TR lassen)

$515{,}22 \text{ m} \cdot 726 = 374051 \text{ m} = 374 \text{ km}$

A 2.2 nicht maßstabsgetreue Skizze:



Alle Winkel bei E müssen jeweils das Maß 120° haben. Damit haben die Basiswinkel des Dreiecks ABE jeweils 30 °, da 30° + 30° + 120° = 180° im Dreieck ABE.

Kosinus-Satz im Dreieck ABE:

$l^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{BE} \cdot \cos \sphericalangle AEB$

$\Leftrightarrow l^2 = (82^2 + 82^2 - 2 \cdot 82 \cdot 82 \cdot \cos(120°)) \text{ m}^2$

$\Leftrightarrow l^2 = 20172 \text{ m}^2$

$\Leftrightarrow l = 142 \text{ m}$

Berechnung der Höhe h im Dreieck ABE:

$\sin \sphericalangle EBA = \frac{h}{\overline{BE}}$

$\Leftrightarrow h = \sin \sphericalangle EBA \cdot \overline{BE} = \sin 30° \cdot 82 \text{ m} = 41 \text{ m}$

Damit ist $b = h + e = 82 \text{ m} + 41 \text{ m} = 123 \text{ m}$

A 2.3

Vierstreckensatz umgangssprachlich formuliert:

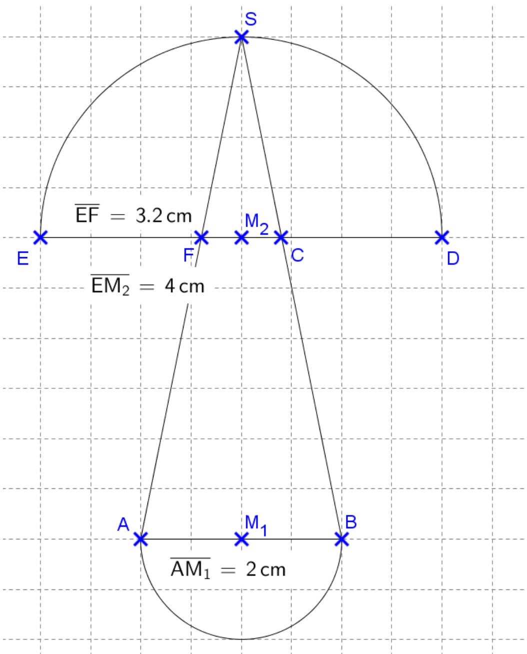
$$\frac{\text{Rotorblatt}}{\text{Mast}} = \frac{\text{recher Schatten}}{\text{linker Schatten}}$$

$$\Leftrightarrow \text{Mast} = \frac{\text{Rotorblatt} \cdot \text{linker Schatten}}{\text{rechter Schatten}}$$

$$\Leftrightarrow \text{Mast} = \frac{82\text{ m} \cdot 42\text{ m}}{25\text{ m}} = 138\text{ m}$$

Der Mast hat eine Höhe von 138 m, der Mast in incl. des senkrecht nach oben stehenden Rotorblatts hat eine Länge von 138 m + 82 m = 220 m.

A 3.1



$$\overline{FM_2} = \overline{EM} - \overline{EF} = 4\text{ cm} - 3{,}2\text{ cm} = 0{,}8\text{ cm}$$

Vierstreckensatz im Bereich ABS:

$$\frac{\overline{SM_1}}{\overline{SM_2}} = \frac{\overline{AM_1}}{\overline{FM_2}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{SM_1} = \frac{\overline{AM_1} \cdot \overline{SM_2}}{\overline{FM_2}} = \frac{2\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}}{0{,}8\text{ cm}} = 10{,}0\text{ cm}$$

A 3.2

$O_{HalbkugelEDS} = 0,5 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot (4\ cm)^2 = 32\ cm^2 \cdot \pi$
$O_{HalbkugelEDS} = 0,5 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot (2\ cm)^2 = 8\ cm^2 \cdot \pi$

$O_{KreisringED} = r_{außen}^2 \cdot \pi - r_{innen}^2 \cdot \pi = (4\ cm)^2 \cdot \pi - (0,8\ cm)^2 \cdot \pi$

Dreieck ABS:

$\overline{BS}^2 = \overline{M_1B}^2 + \overline{M_1S}^2$

$\Leftrightarrow \overline{BS}^2 = (2\ cm)^2 + (10\ cm)^2 = 104\ cm^2$

$\Leftrightarrow \overline{BS} = 10,2\ cm$

Dreieck FCS:

$\overline{CS}^2 = \overline{M_2C}^2 + \overline{M_2S}^2$

$\Leftrightarrow \overline{BS}^2 = (0,8\ cm)^2 + (4\ cm)^2 = 16,64\ cm^2$

$\Leftrightarrow \overline{BS} = 4,1\ cm$

$M_{KegelABS} = r \cdot s \cdot \pi = 2\ cm \cdot 10,2\ cm \cdot \pi = 20,4\ cm^2 \cdot \pi$
$M_{KegelFCS} = r \cdot s \cdot \pi = 0,8\ cm \cdot 4,1\ cm \cdot \pi = 3,28\ cm^2 \cdot \pi$

Und nun die finale Zusammenfassung:

$O = 32\ cm^2 \cdot \pi + 8\ cm^2 \cdot \pi + (4\ cm)^2 \cdot \pi - (0,8\ cm)^2 \cdot \pi$
$+ 20,4\ cm^2 \cdot \pi - 3,28\ cm^2 \cdot \pi$

$O = 227,7\ cm^2$

Aufgabe B1

B 1.1 $S(0,5 \mid 1)$ und $a = 0,5$

p_2: $y = 0,5x^2 + 3$

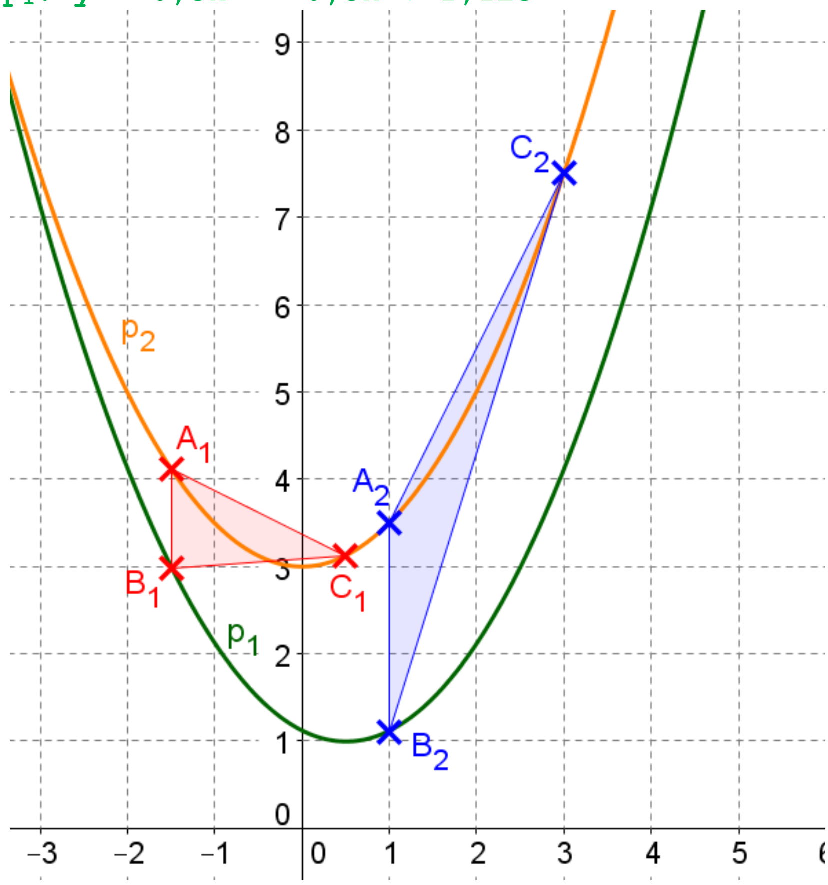
Zusammenbau von p_1:

Scheitelform: $y = 0,5(x - 0,5)^2 + 1$

$\Leftrightarrow y = 0,5(x^2 - x + 0,25) + 1$

$\Leftrightarrow y = 0,5x^2 - 0,5x + 1,125$

Damit ist **p_1: $y = 0,5x^2 - 0,5x + 1,125$**



B 1.2

$0,5x^2 + 3 = 0,5x^2 - 0,5x + 1,125$

$\Leftrightarrow 0,5x = -1,875$

$\Leftrightarrow x = -3,75$ und damit $T(-3,75 \mid 10,03)$

B 1.3

$C_n(x + 2 \mid 0,5(x + 2)^2 + 3)$

$C_n(x + 2 \mid 0,5(x^2 + 4x + 4) + 3)$

$C_n(x + 2 \mid 0,5x^2 + 2x + 2 + 3)$

$C_n(x + 2 \mid 0,5x^2 + 2x + 5)$

B 1.4

$\overline{A_nB_n}(x) = \sqrt{(0{,}5x^2 + 3 - (0{,}5x^2 - 0{,}5x + 1{,}125))^2}$ LE

$\Leftrightarrow \overline{A_nB_n}(x) = (0{,}5x^2 + 3 - 0{,}5x^2 + 0{,}5x - 1{,}125)$ LE

$\Leftrightarrow \overline{A_nB_n}(x) = (0{,}5x + 1{,}875)$ LE

B 1.5

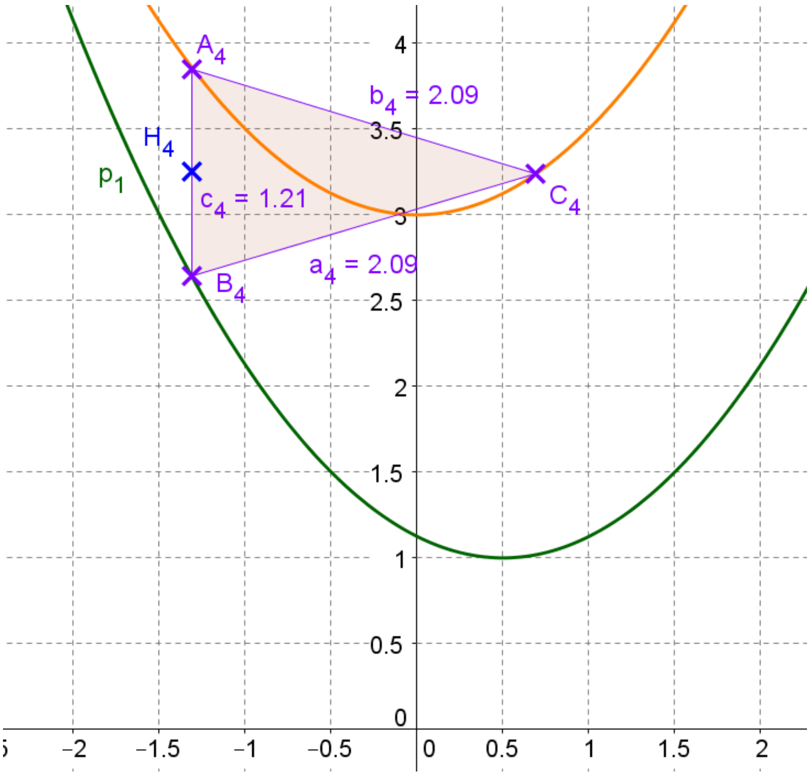
Die Punkte B_3 und C_3 müssen die gleiche y-Koordinate haben, um bei dem Punkt B_3 einen rechten Winkel zu bekommen:

$0{,}5x^2 - 0{,}5x + 1{,}125 = 0{,}5x^2 + 2x + 5$ (aus B 1.3)

$\Leftrightarrow -2{,}5x = 3{,}875$

$\Leftrightarrow x = -1{,}55$ Damit ist $B_3(-1{,}55 \mid 3{,}10)$

B 1.6



Die y-Koordinate von C_4 liegt „auf halbem Weg“ von A_4 nach B_4. Somit hat H_4 genau diese y-Koordinate.

$\overline{AH}(x) = 0{,}5 \cdot (0{,}5x + 1{,}875)$ LE $= (0{,}25x + 0{,}9375)$ LE

$\overline{A_4H_4} = \sqrt{(0{,}5x^2 + 2x + 5 - (0{,}5x^2 - 0{,}5x + 1{,}125))^2}$

$\Leftrightarrow 0{,}25x + 0{,}9375 = (0{,}5x^2 + 2x + 5 - (0{,}5x^2 - 0{,}5x + 1{,}125))$

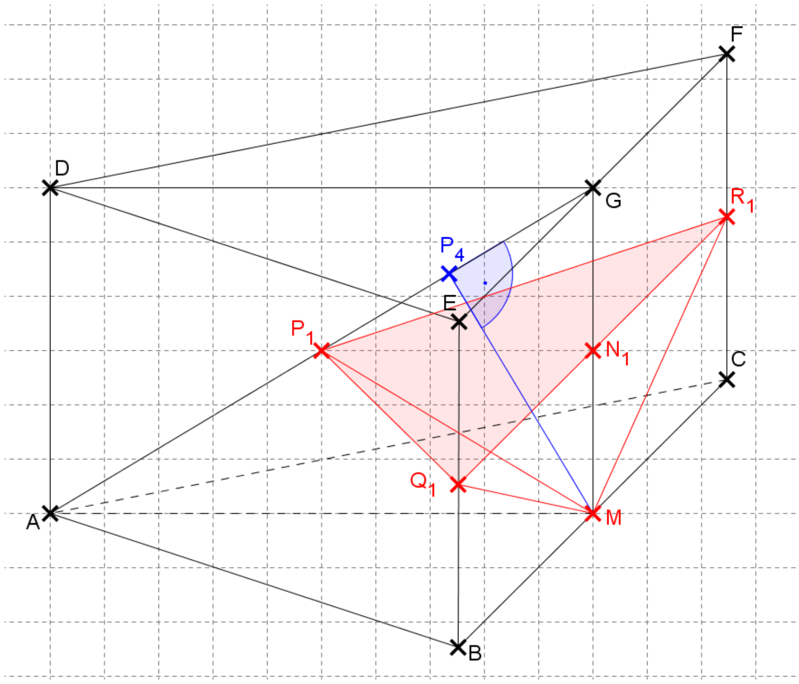
$\Leftrightarrow 0{,}25x + 0{,}9375 = 2{,}5x + 3{,}875$

$\Leftrightarrow -2{,}25x = 2{,}9375$

$\Leftrightarrow x = -1{,}31 \quad \mathbb{L} = \{-1{,}31\}$

Aufgabe B2

B 2.1 und 2.2



$$\overline{AG}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MG}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{AG} = \sqrt{(10\ \text{cm})^2 + (6\ \text{cm})^2} = 11{,}66\ \text{cm}$$

$$\tan \sphericalangle AGM = \frac{\overline{AM}}{\overline{MG}} = \frac{10\ \text{cm}}{6\ \text{cm}} = 1\tfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \sphericalangle AGM = 59{,}04°$$

B 2.3

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot A_{PQR} \cdot \overline{NM}(x)$$

Höhe des Dreiecks PQR: Vierstreckensatz im Bereich AMG:

$$\frac{\overline{NP}(x)}{\overline{AM}} = \frac{\overline{GN}(x)}{\overline{GM}}$$

$$\overline{NP}(x) = \frac{\overline{GN}(x) \cdot \overline{AM}}{\overline{GM}} = \frac{x\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm}}{6\ \text{cm}} = 1\tfrac{2}{3}x\ \text{cm} = 1{,}67x\ \text{cm}$$

Also:

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{QR} \cdot \overline{NP}(x) \cdot \overline{NM}(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 14\ \text{cm} \cdot 1{,}67x\ \text{cm} \cdot (6 - x)\ \text{cm}$$

$$\Leftrightarrow \quad V(x) = (-3{,}90x^2 + 23{,}38x)\ \text{cm}^3$$

B 2.4

$$V_{max} = -3{,}9(x^2 - 5{,}99x)$$
$$\Leftrightarrow \quad V_{max} = -3{,}9(x^2 - 5{,}99x + 3^2 - 3^2)$$
$$\Leftrightarrow \quad V_{max} = -3{,}9[(x - 3)^2 - 9]$$
$$\Leftrightarrow \quad V_{max} = -3{,}9[(x - 3)^2 + 35{,}1$$

Damit ist $V_{max} = 35{,}1\ cm^3$ für $x = 3$.
Aufgabensteller: $V_{max} = 35{,}04\ cm^3$

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MG}$$
$$\Leftrightarrow \quad V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot 14\ cm \cdot 10\ cm \cdot 6\ cm = 420\ cm^3$$

$$\frac{35{,}1\ cm^3 \cdot 100\ \%}{420\ cm^3} = 8{,}36\ \%$$

$100\ \% - 8{,}36\ \% = 91{,}64\ \%$ Aufgabensteller: $91{,}66\ \%$

B 2.5

$$7{,}5\ cm^3 = (-3{,}90x^2 + 23{,}38x)\ cm^3$$
$$\Leftrightarrow \quad -3{,}90x^2 + 23{,}38x - 7{,}5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-23{,}38 \pm \sqrt{23{,}38^2 - 4 \cdot (-3{,}90) \cdot (-7{,}5)}}{2 \cdot (-3{,}90)} =$$
$$\frac{-23{,}38 \pm \sqrt{429{,}6244}}{-7{,}80}$$

$x_1 = 0{,}34 \vee x_2 = 5{,}65 \quad \mathbb{L} = \{0{,}34;\ 5{,}65\}$

B 2.6
Dreieck MNP:

$$\overline{P_nM}^{2}(x) = \overline{MN_n}^{2} + \overline{N_nP_n}^{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_nM}^{2}(x) = [(6 - x)^2 + (1{,}67x)^2]\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_nM}^{2}(x) = [36 - 12x + x^2 + 2{,}79x^2]\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{P_nM}^{2}(x) = [3{,}79x^2 - 12x + 36]\ cm^2$$

Nun quadratisch ergänzen ... oder:
Wenn die Strecke minimal ist, entsteht bei M_4 ein rechter Winkel und sin/cos/tan funktionieren:
Dreieck MGP_4:

$$\sin \sphericalangle AGM = \frac{\overline{MP_4}}{\overline{MG}} =$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP_4} = \sin \sphericalangle AGM \cdot \overline{MG} = \sin 59{,}04° \cdot 6\ cm = 5{,}15\ cm$$