Abschlussprüfung 2015
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Nachtermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 28.05.2019

Aufgabe A1

A 1.1

$\sphericalangle CMA = 180° - 58° = 122°$*

Kosinus-Satz im Dreieck AMC:

$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MC} \cdot \cos \sphericalangle CMA$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 122°)\ cm^2 = 28{,}48\ cm^2$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = 5{,}34\ cm$

Sinus-Satz im Dreieck AMC:

$\frac{\sin \sphericalangle BAC}{\overline{MC}} = \frac{\sin \sphericalangle CMA}{\overline{AC}}$

$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle BAC = \frac{\sin \sphericalangle CMA \cdot \overline{MC}}{\overline{AC}} = \frac{\sin 122° \cdot 4\ cm}{5{,}34\ cm} = 0{,}64$

$\Leftrightarrow \sphericalangle BAC = 39{,}44°$

$180° - 39{,}44° = 140{,}56°$ nicht möglich wegen Innenwinkelsumme*

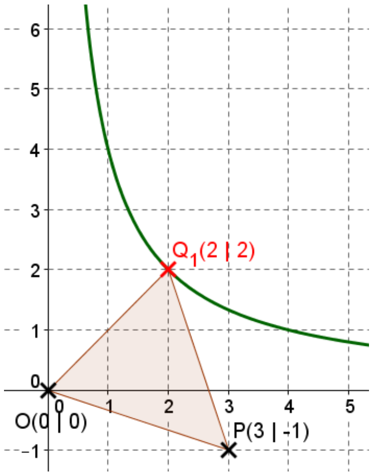
A 1.2

$u = u_{Kreisbogen} + \overline{AB} + \overline{AC}$

$\Leftrightarrow u = 2 \cdot \overline{MC} \cdot \pi \cdot \frac{58°}{360°} + 6\ cm + 5{,}34\ cm$

$\Leftrightarrow u = 2 \cdot 4\ cm \cdot \pi \cdot \frac{58°}{360°} + 6\ cm + 5{,}34\ cm = 15{,}39\ cm$

Aufgabe A2



A 2.1

$\overline{OQ_1} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2}$ cm $= \sqrt{8}$ cm $=2{,}83$ cm

$\overline{OP} = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-0)^2}$ cm $= \sqrt{10}$ cm $= 3{,}16$ cm

$\overline{PQ_1} = \sqrt{(2-3)^2 + (2-(-1))^2}$ cm $= \sqrt{10}$ cm $= 3{,}16$ cm

$\overline{OQ_1} \neq \overline{OP} \Rightarrow$ nicht gleichseitig

A 2.2

Kosinus-Satz:

$$\overline{PQ_1}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ_1}^2 - 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OQ_1} \cdot \cos \sphericalangle POQ_1$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle POQ_1 = \frac{\overline{PQ_1}^2 - \overline{OP}^2 - \overline{OQ_1}^2}{-2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OQ_1}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \sphericalangle POQ_1 = \frac{\sqrt{10}^2 - \sqrt{10}^2 - \sqrt{8}^2}{-2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8}} = 0{,}45$$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle POQ_1 = 63{,}43°$$

A 2.3

$$\overrightarrow{OQ_n} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{4}{x} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

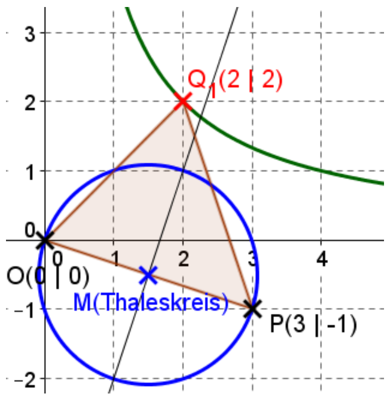
$$A(x) = 0{,}5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & x \\ -1 & \frac{4}{x} \end{vmatrix} \text{ FE}$$

$$\Leftrightarrow A(x) = 0{,}5 \cdot \left(\frac{12}{x} + x\right) \text{ FE}$$

$$\Leftrightarrow A(x) = \left(\frac{6}{x} + 0{,}5x\right) \text{FE}$$

A 2.4

Da es keinen Schnittpunkt mit dem Graphen gibt, existiert auch kein Dreieck mit rechtem Winkel.



Aufgabe A3

A 3.1
Vierstreckensatz im Bereich ABS:

$$\frac{\overline{SK}}{\overline{SM}} = \frac{\overline{JC}}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{SK} = \frac{\overline{JC} \cdot \overline{SM}}{\overline{AB}} = \frac{4\text{ cm} \cdot 4{,}5\text{ cm}}{7{,}5\text{ cm}} = 2{,}4\text{ cm}$$

$$\overline{MK} = \overline{SM} - \overline{SK} = 4{,}5\text{ cm} - 2{,}4\text{ cm} = 2{,}1\text{ cm}$$

A 3.2
Ein wenig umständlich zu rechnen, da es sehr viele kleine Teile gibt…
Pythagoras im Dreieck AMS:

$$\overline{AS} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{SM}^2} = \sqrt{3{,}75^2 + 4{,}5^2}\text{ cm} = 5{,}9\text{ cm}$$

Pythagoras im Dreieck JKS:

$$\overline{JS} = \sqrt{\overline{JK}^2 + \overline{KS}^2} = \sqrt{2^2 + 2{,}4^2}\text{ cm} = 3{,}1\text{ cm}$$

MZG

$$A_{\text{Grundfläche}} = \overline{AM}^2 \cdot \pi = 3{,}75^2 \cdot \pi$$

$$A_{\text{Zylindervonoben}} = \overline{JK}^2 \cdot \pi = 2^2 \cdot \pi$$

$$M_{\text{Kegelkomplett}} = \overline{AM}^2 \cdot \overline{AS} \cdot \pi = 3{,}75 \cdot 5{,}9 \cdot \pi$$

$$M_{\text{Kegelabzugweiljawasfehlt}} = \overline{JK}^2 \cdot \overline{JS} \cdot \pi = 2 \cdot 3{,}1 \cdot \pi$$

$$M_{\text{Zylinderaußen}} = 2 \cdot \overline{JK} \cdot \pi \cdot \overline{SK} = 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2{,}4$$

$$M_{\text{Zylinderinnen}} = 2 \cdot \overline{SE} \cdot \pi \cdot \overline{EF} = 2 \cdot 0{,}75 \cdot \pi \cdot 2$$

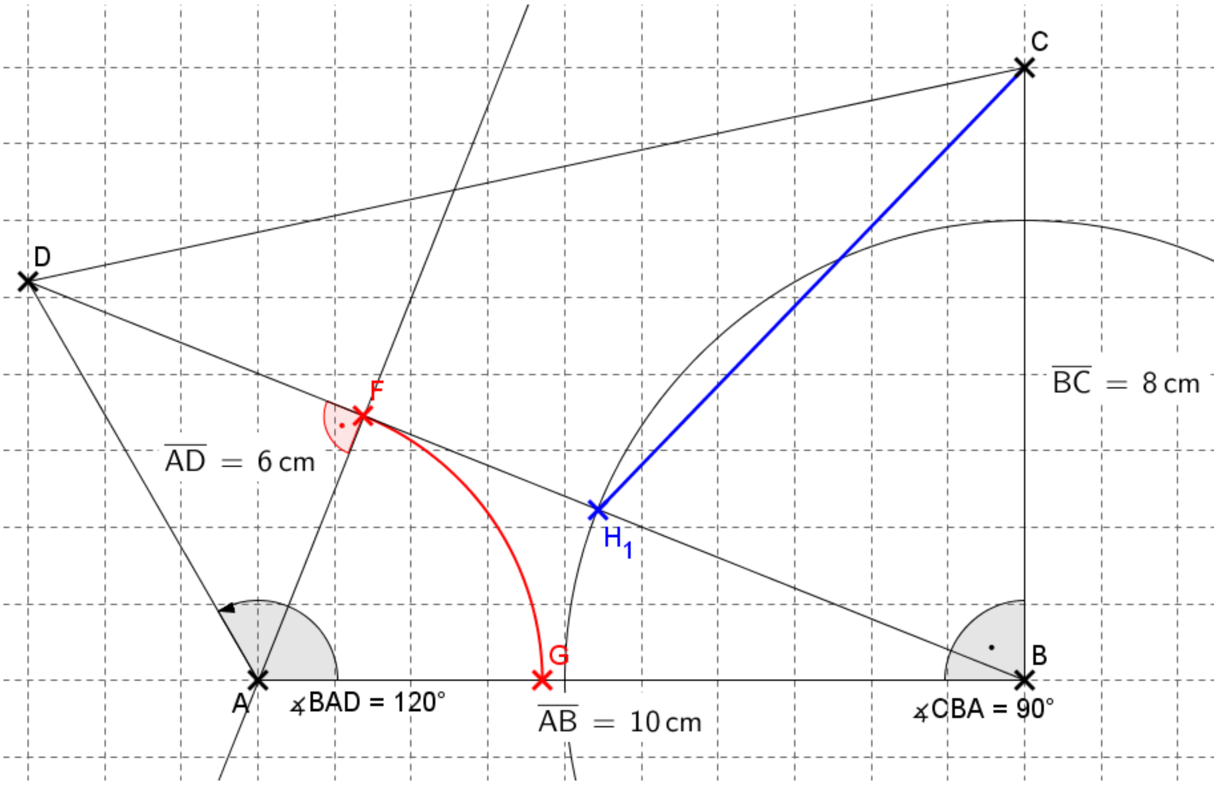
Jetzt wird's lang:

$$O = 3{,}75^2 \cdot \pi + 2^2 \cdot \pi + 3{,}75 \cdot 5{,}9 \cdot \pi - 2 \cdot 3{,}1 \cdot \pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2{,}4 + 2 \cdot 0{,}75 \cdot \pi \cdot 2 = 146{,}4$$

Damit ist $O = 146{,}4\text{ cm}^2$.

Aufgabe B1

B 1.1



Kosinus-Satz im Dreieck ABD:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \sphericalangle BAD$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{BD}^2 = (10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 120°)\ \text{cm}^2 = 196{,}00\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{BD} = 14{,}00\ \text{cm}$$

$$\frac{\sin \sphericalangle DBA}{\overline{AD}} = \frac{\sin \sphericalangle BAD}{\overline{BD}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin \sphericalangle DBA = \frac{\sin \sphericalangle BAD \cdot \overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sin 120°* \cdot 6\ \text{cm}}{14\ \text{cm}} = 0{,}37$$

$$\Leftrightarrow \quad \sphericalangle DBA = 21{,}79°$$

180° - 21,79° = 158,21° nicht möglich wegen Innenwinkelsumme*

B 1.2

$\sphericalangle CBD = 90° - 21{,}79° = 68{,}21°$

Kosinus-Satz im Dreieck DBC:

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD} \cdot \cos \sphericalangle CBD$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{CD}^2 = (8^2 + 14^2 - 2 \cdot 8 \cdot 14 \cdot \cos 68{,}21°)\ \text{cm}^2 = 176{,}85\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{CD} = 13{,}30\ \text{cm}$$

$u = (10 + 8 + 13{,}30 + 6)\ \text{cm} = 37{,}30\ \text{cm}$

B 1.3
Dreieck ABF:

$$\sin \sphericalangle DBA = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AF} = \sin \sphericalangle DBA \cdot \overline{AB} = \sin 21{,}79° \cdot 10 \text{ cm} = 3{,}71 \text{ cm}$$

$$\sphericalangle BAF = 180° - 90° - 21{,}79° = 68{,}21°$$

$$A = 0{,}5 \cdot \sin \sphericalangle BAF \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AF} - \overline{AF}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle BAF}{360°}$$

$$\Leftrightarrow A = \left(0{,}5 \cdot \sin 68{,}21° \cdot 10 \cdot 3{,}71 - 3{,}71^2 \cdot \pi \cdot \frac{68{,}21°}{360°}\right) \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow A = 9{,}03 \text{ cm}^2$$

B 1.4
Kosinus-Satz im Dreieck H_nBC:

$$\overline{H_nC}(x)^2 = \overline{H_nB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{H_nB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \sphericalangle CBD$$

$$\Leftrightarrow \overline{H_nC}(x)^2 = (x^2 + 8^2 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \cos 68{,}21°) \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{H_nC}(x)^2 = (x^2 + 64 - 5{,}94x) \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{H_nC}(x) = \sqrt{x^2 - 5{,}94x + 64} \text{ cm}$$

B 1.5
Bei der minimalen Strecke entsteht bei H_n ein rechter Winkel, so dass sin / cos / tan gelten.
MZG

$$\cos \sphericalangle CBD = \frac{x}{\overline{BC}}$$

$$\Leftrightarrow x = \cos \sphericalangle CBD \cdot \overline{BC} = \cos 68{,}21° \cdot 8 = 2{,}97$$

$$\sqrt{2{,}97^2 - 5{,}94 \cdot 2{,}97 + 64} = 7{,}43$$

Damit ist für x = 2,97 die minimale Streckenlänge 7,43 cm.

Oder mit quadratischer Ergänzung:

$$T_{min} = x^2 - 5{,}94x + 64$$

$$\Leftrightarrow T_{min} = x^2 - 5{,}94x + 2{,}97^2 - 2{,}97^2 + 64$$

$$\Leftrightarrow T_{min} = (x - 2{,}97)^2 + 55{,}1791$$

Damit ist für x = 2,97 die minimale Streckenlänge
$\sqrt{55{,}1791}$ cm = 7,43 cm

B 1.6

Dreieck ABF:

$$\cos \sphericalangle DBA = \frac{\overline{BF}}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{BF} = \cos \sphericalangle DBA \cdot \overline{AB} = \cos 21{,}79° \cdot 10 \text{ cm} = 9{,}29 \text{ cm}$$

Kosinus-Satz im Dreieck FBC:

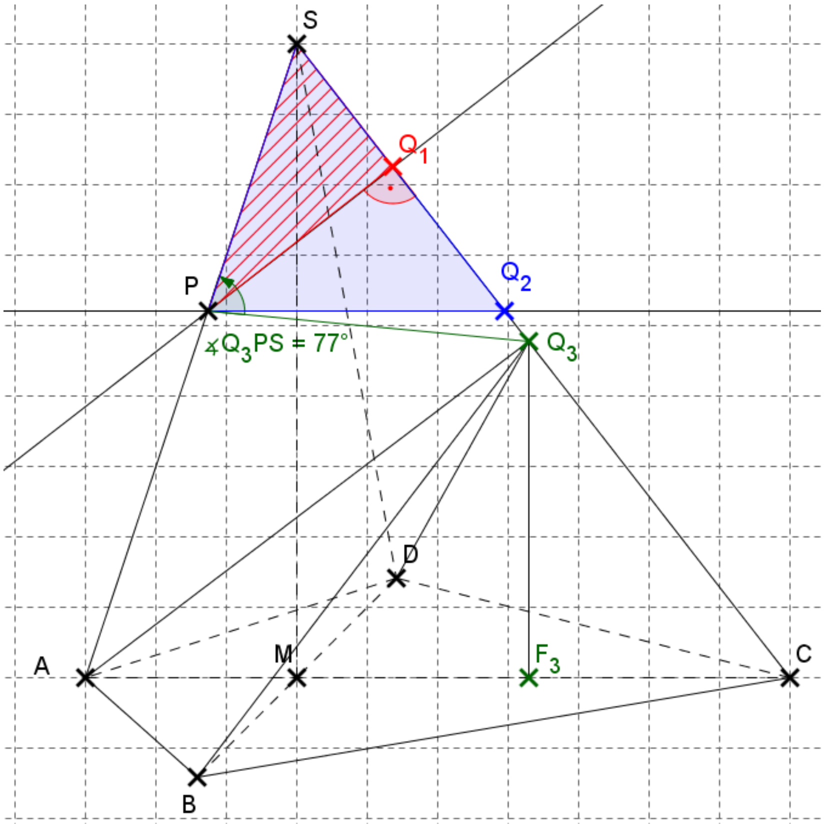
$$\overline{FC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BF}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BF} \cdot \cos \sphericalangle CBD$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{FC}^2 = (8^2 + 9{,}29^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9{,}29 \cdot \cos 68{,}21°) \text{ cm}^2 = 95{,}13 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{FC} = 9{,}75 \text{ cm}$$

$\overline{BF} \neq \overline{FC} \neq \overline{BC} \quad \Rightarrow$ nicht gleichschenklig

Aufgabe B2
B 2.1 und B 2.2



Pythagoras im Dreieck MCS:

$$\overline{CS} = \sqrt{\overline{MC}^2 + \overline{MS}^2} = \sqrt{7^2 + 9^2}\ \text{cm} = 11{,}40\ \text{cm}$$

$$\tan \sphericalangle SCA = \frac{\overline{MS}}{\overline{MC}} = \frac{9\ \text{cm}}{7\ \text{cm}} = 1{,}29 \Rightarrow \sphericalangle SCA = 52{,}13°$$

B 2.3

Dreieck AMS:

$$\tan \sphericalangle CAS = \frac{\overline{MS}}{\overline{AM}} = \frac{9\ \text{cm}}{3\ \text{cm}} = 3 \Rightarrow \sphericalangle CAS = 71{,}57°$$

$$\sphericalangle ASC = 180° - 52{,}13° - 71{,}57° = 56{,}30°$$

Dreieck PQ_1S:

$$\cos \sphericalangle ASC = \frac{\overline{SQ_1}}{\overline{SP}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{SQ_1} = \cos \sphericalangle ASC \cdot \overline{SP} = \cos 56{,}30° \cdot 4\ \text{cm} = 2{,}22\ \text{cm}$$

B 2.4
Dreieck PQ_1S:

$$\sin \sphericalangle ASC = \frac{\overline{PQ_1}}{\overline{SP}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{PQ_1} = \sin \sphericalangle ASC \cdot \overline{SP} = \sin 56{,}30° \cdot 4\text{ cm} = 3{,}33\text{ cm}$$

$\sphericalangle SQ_2P = \sphericalangle SCA = 52{,}13°$

Dreieck PQ_2Q_1:

$$\tan \sphericalangle SQ_2P = \frac{\overline{PQ_1}}{\overline{Q_2Q_1}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{Q_2Q_1} = \frac{\overline{PQ_1}}{\tan \sphericalangle SQ_2P} = \frac{3{,}33\text{ cm}}{\tan 52{,}13°} = 2{,}59\text{ cm}$$

$$\overline{SQ_2} = \overline{Q_2Q_1} + \overline{SQ_1} = 2{,}59\text{ cm} + 2{,}22\text{ cm} = 4{,}81\text{ cm}$$

$$A = 0{,}5 \cdot \overline{SQ_2} \cdot \overline{PQ_1} = 0{,}5 \cdot 4{,}81\text{ cm} \cdot 3{,}33\text{ cm} = 8{,}01\text{ cm}^2$$

B 2.5
Solche Aufgaben finde ich toll, da man hier ein wenig basteln muss und die Lösung nicht direkt ins Auge sticht.

Wie kann man auf so eine Lösung kommen? Mir hat ein Blick auf die Aufgabe 2.6 geholfen, da geht es um die gleiche Art von Pyramide in Abhängigkeit von x, das oben bei S mit $[SC_n]$ startet. Damit war klar, dass man bei der 2.6 irgendwie „von oben kommen" muss – und das bietet sich auch hier an, da man bei der 2.5 die Höhe einer bestimmten Pyramide berechnet, bei 2.6 ist dann die gleiche Höhe in Abhängigkeit von x gesucht:

Dreieck PQ_3S:
$\sphericalangle SQ_3P = 180° - 77° - 56{,}30° = 46{,}70°$
Sinus-Satz:

$$\frac{\overline{SQ_3}}{\sin \sphericalangle Q_3PS} = \frac{\overline{SP}}{\sin \sphericalangle SQ_3P}$$

$$\Leftrightarrow \overline{SQ_3} = \frac{\overline{SP} \cdot \sin \sphericalangle Q_3PS}{\sin \sphericalangle SQ_3P}$$

$$\Leftrightarrow \overline{SQ_3} = \frac{4\text{ cm} \cdot \sin 77°}{\sin 46{,}70°} = 5{,}36\text{ cm}$$

$* \overline{CQ_3} = \overline{CS} - \overline{SQ_3} = 11,40 \text{ cm} - 5,36 \text{ cm} = 6,04 \text{ cm}$

Dreieck F_3CQ_3:

$$\sin \sphericalangle SCA = \frac{\overline{F_3Q_3}}{\overline{CQ_3}}$$

$\Leftrightarrow \overline{F_3Q_3} = \sin \sphericalangle SCA \cdot \overline{CQ_3} = \sin 52,13° \cdot 6,04 \text{ cm} = 4,77 \text{ cm}$

B 2.6

Wir setzen beim * von 2.5 an und „machen alles mit x“:

$\overline{CQ_n}(x) = (\overline{CS} - x) \text{ cm} = (11,40 - x) \text{ cm}$

$$\sin \sphericalangle SCA = \frac{\overline{F_nQ_n}(x)}{\overline{CQ_n}(x)}$$

$\Leftrightarrow \overline{F_nQ_n}(x) = \sin \sphericalangle SCA \cdot \overline{CQ_n}(x)$

$\Leftrightarrow \overline{F_nQ_n}(x) = \sin 52,13° \cdot (11,40 - x) \text{ cm}$

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{F_nQ_n}(x)$$

$\Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin 52,13° \cdot (11,40 - x) \text{ cm}^3$

$\Leftrightarrow V(x) = (119,99 - 10,53x) \text{ cm}^3$