Abschlussprüfung 2014
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Haupttermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 09.06.2017

Aufgabe A1

Gesucht: $V_{Pflanzenschale} = V_{KegelstumpfABEF} + V_{ZylinderBCDE}$

$V_{ZylinderBCDE} = \overline{KC}^2 \cdot \pi \cdot \overline{BC} = (2\ dm)^2 \cdot \pi \cdot 1,4\ dm = 5,6 \cdot \pi\ dm^3$

Dreieck LBH:

$\tan 35° = \frac{\overline{LH}}{\overline{HB}} \Leftrightarrow \overline{LH} = \tan 35° \cdot \overline{HB} = \tan 35° \cdot 2\ dm = 1,4\ dm$

Damit ist $\overline{LG} = \overline{LH} - \overline{GH} = 1,4\ dm - 0,6\ dm = 0,8\ dm$

Dreieck LAG:
$\sphericalangle GAL = \sphericalangle EBA = 35°$

$\tan 35° = \frac{\overline{LG}}{\overline{AG}} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{\overline{LG}}{\tan 35°} = \frac{0,8\ dm}{\tan 35°} = 1,1\ dm$

$V_{Pflanzenschale} = V_{KegelstumpfABEF} + V_{ZylinderBCDE}$

$\Leftrightarrow V_{Pflanzenschale} = (\frac{1}{3} \cdot \overline{HB}^2 \cdot \overline{LH} \cdot \pi - \frac{1}{3} \cdot \overline{AG}^2 \cdot \overline{LG} \cdot \pi + \overline{KC}^2 \cdot \pi \cdot \overline{BC})$

$\Leftrightarrow V_{Pflanzenschale} = (\frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 1,4 \cdot \pi - \frac{1}{3} \cdot 1,1^2 \cdot 0,8 \cdot \pi + 2^2 \cdot \pi \cdot 1,4)\ dm^3$

$\Leftrightarrow V_{Pflanzenschale} = 22,4\ dm^3$

$22,4\ dm^3 \triangleq 22,4\ l$
Da 22,4 l > 20 l passt die Erde vollständig rein.

Aufgabe A2

A 2.1

Kosinussatz im Dreieck BCD:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\cos\sphericalangle DCB$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = (7^2 + 8^2 - 2\cdot7\cdot8\cdot\cos 130°)\ cm^2 = 184{,}99\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 13{,}60\ cm$$

Und gleich nochmal:

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\cos\sphericalangle CBD$$

$$\Leftrightarrow \cos\sphericalangle CBD = \frac{\overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2}{-2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{BD}} = \frac{8^2 - 7^2 - 13{,}6^2}{-2\cdot7\cdot13{,}6} = 0{,}89$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = \sphericalangle CBD = 26{,}79°$$

Der Winkel $\sphericalangle BAD$ ist nicht ganz einfach …
Zuerst zeichnen wir die Höhe des Trapezes vom Punkt C aus ein. Der Winkel $\sphericalangle HFPBC$ beträgt nun in dem rechten Dreieck HFPBC 130° - 90° = 40°.
Damit ist der komplette Winkel bei B $\sphericalangle CBA$ = 180° - 90° - 40° = 50°. Somit ist der Winkel $\sphericalangle DBA$ = 50° - 26,79° = 23,21°.

Sinus-Satz im Dreieck ABD:

$$\frac{\sin\sphericalangle BAD}{\overline{BD}} = \frac{\sin\sphericalangle DBA}{\overline{AD}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\sphericalangle BAD = \frac{\sin\sphericalangle DBA\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\sin 23{,}21°\cdot 13{,}6\ cm}{6\ cm} = 0{,}89$$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle BAD = \alpha = 63{,}29°$$

(180° - 63,29° = 116,71° nicht möglich aus Zeichnung)

A 2.2

Dreieck EBC:

$$\sin\varepsilon = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{CE} = \sin\varepsilon\cdot\overline{BC} = \sin 26{,}79°\cdot 7\ cm = 3{,}16\ cm$$

A 2.3

Dreieck ABD: $\sphericalangle ABD$ = 180° - 23,21° - 63,29° = 93,5°

Kosinussatz im Dreieck ABD:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 - 2\cdot\overline{BD}\cdot\overline{AD}\cdot\cos\sphericalangle ABD$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = (13{,}6^2 + 6^2 - 2\cdot13{,}6\cdot6\cdot\cos 93{,}5°)\ cm^2 = 230{,}92\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 15{,}20\ cm$$

Dreieck HFPBC:

$\sin \sphericalangle CBA = \frac{h}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \quad h = \sin \sphericalangle CBA \cdot \overline{BC} = \sin 50° \cdot 7 \text{ cm} = 5{,}36 \text{ cm}$

$A_{Trapez} = 0{,}5 \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot h$

$\Leftrightarrow A_{Trapez} = 0{,}5 \cdot (15{,}20 + 8) \cdot 5{,}36 \text{ cm}^2 = 62{,}18 \text{ cm}^2$

[man könnte A_{Trapez} auch aus zwei Teildreiecken basteln]

$A_{grau} = \overline{CE}^2 \cdot \pi - (\overline{CE} - 1)^2 \cdot \pi$

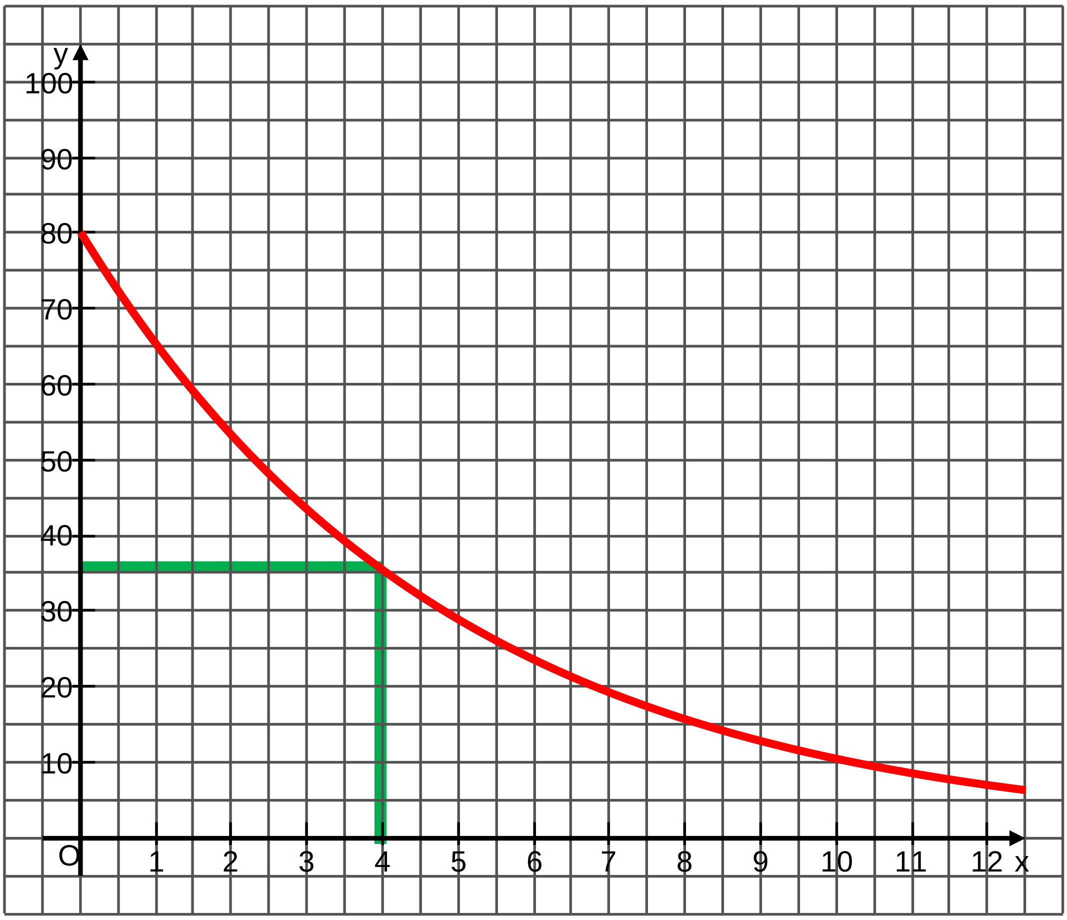
$\Leftrightarrow A_{grau} = (3{,}16^2 \cdot \pi \cdot \frac{130°}{360°} - (3{,}16 - 1)^2 \cdot \pi \cdot \frac{130°}{360°}) \text{ cm}^2 = 6{,}04 \text{ cm}^2$

$\frac{6{,}04}{62{,}18} \approx 0{,}0971 = 9{,}71\ \%$

Aufgabe A3

A 3.1

x	0	1	2	3	5	8	12
y	80	65	53	43	29	16	7



A 3.2

Nach 4 Minuten.

A 3.3

$y = 80 \cdot 0{,}815^{10} = 10$ Also: $80 \text{ cm}^3 - 10 \text{ cm}^3 = 70 \text{ cm}^3$

Aufgabe B1

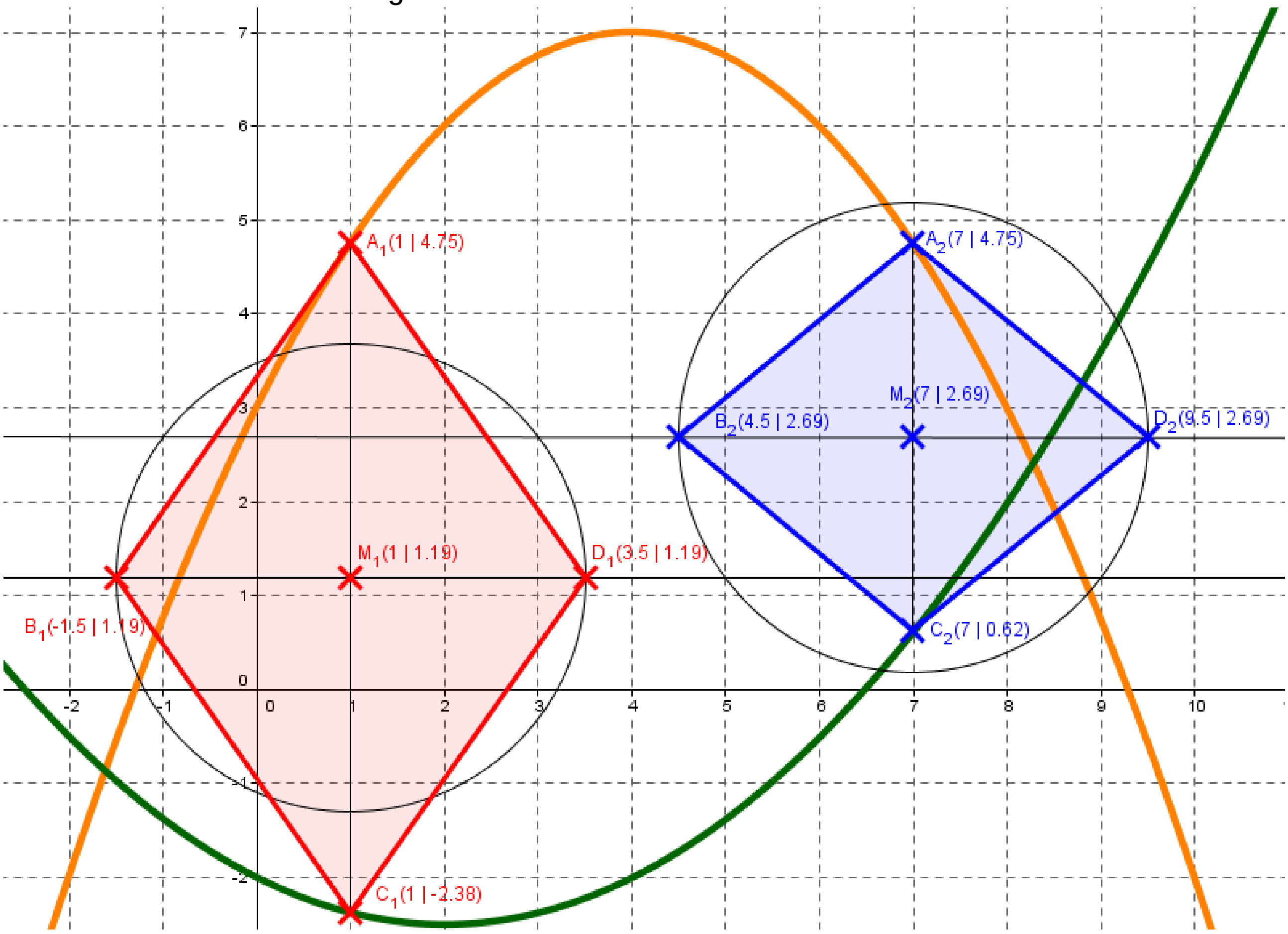
B 1.1 p_2: $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$

P(-2 | -2) Q(8 | 3)

$$\begin{aligned}
&\text{I} && -2 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + 3\\
&\text{II} && 3 = a\cdot 8^2 + b\cdot 8 + 3\\
\Leftrightarrow\ &\text{I} && -2 = 4a - 2b + 3\\
&\text{II} && 3 = 64a + 8b + 3\\
\Leftrightarrow\ &\text{I} && -5 + 2b = 4a \quad |:4\\
&\text{II} && 8b = -64a \ *\\
\Leftrightarrow\ &\text{I} && -1{,}25 + 0{,}5b = a \quad \text{in II}\\
&\text{II} && 8b = -64\cdot(-1{,}25 + 0{,}5b)\\
\Leftrightarrow\ &\text{II} && 8b = 80 - 32b\\
\Leftrightarrow\ &\text{II} && 40b = 80\\
\Leftrightarrow\ &\text{II} && b = 2 \quad \text{in } *\\
* \ & && 8\cdot 2 = -64a\\
\Leftrightarrow\ & && a = -0{,}25 = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Damit ist p_1: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$

B 1.2 Siehe Zeichnung



B 1.3

$$\overline{A_nC_n}(x) = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3\right) - \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 2\right)}\ LE$$

$$\Leftrightarrow\ \overline{A_nC_n}(x) = (-0{,}25x^2 + 2x + 3 - 0{,}125x^2 + 0{,}5x + 2)\ LE$$

$$\Leftrightarrow\ \overline{A_nC_n}(x) = (-0{,}375x^2 + 2{,}5x + 5)\ LE$$

B 1.4

Gehen wir mal in ein beliebiges Dreieck $B_nM_nA_n$. Pythagoras:

$$\overline{A_nB_n}^2 = \overline{B_nM_n}^2 + \overline{M_nA_n}^2$$

$$\Leftrightarrow\ \overline{M_nA_n}^2 = \overline{A_nB_n}^2 - \overline{B_nM_n}^2 = (4\ cm)^2 - (2{,}5\ cm)^2 = 9{,}75\ cm^3$$

$$\Leftrightarrow\ \overline{M_nA_n} = 3{,}12\ cm \text{ und damit gilt: } \overline{A_{3/4}C_{3/4}} = 6{,}24\ cm$$

Gleichsetzen:

$$6{,}24 = -0{,}375x^2 + 2{,}5x + 5$$

$$\Leftrightarrow\ -0{,}375x^2 + 2{,}5x - 1{,}24 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4\cdot(-0{,}375)\cdot(-1{,}24)}}{2\cdot(-0{,}375)} = \frac{-2{,}5 \pm \sqrt{4{,}39}}{-0{,}75}$$

$x_1 = 0{,}54 \vee x_2 = 6{,}13 \quad \mathbb{L} = \{0{,}54;\ 6{,}13\}$

Damit ist $A_3(0{,}54 \mid 4{,}01)$ und $A_4(6{,}13 \mid 5{,}87)$

B 1.5

$$T_{max} = -0{,}375x^2 + 2{,}5x + 5$$

$$\Leftrightarrow\ T_{max} = -0{,}375(x^2 - 6\tfrac{2}{3}x) + 5$$

$$\Leftrightarrow\ T_{max} = -0{,}375(x^2 - 6\tfrac{2}{3}x + 3\tfrac{1}{3}^2 - 3\tfrac{1}{3}^2) + 5$$

$$\Leftrightarrow\ T_{max} = -0{,}375(x - 3{,}33)^2 + 9{,}17$$

Damit ist die maximale Diagonalenlänge 9,17 LE für x = 3,33.

$A = 0{,}5 \cdot 9{,}17 \cdot 5\ cm^2 = 22{,}93\ cm^2$

B 1.6

Je länger die Diagonale [AC] ist, desto größer wird der Winkel bei D_n. Es muss also gezeigt werden, dass der größtmögliche Winkel bei maximaler Diagonalenlänge kleiner als 65° ist.

Na dann mal los:

Dreieck $M_nD_nA_n$:

$$\tan \sphericalangle A_nD_nM_n = \frac{\overline{M_nA_n}}{\overline{M_nD_n}} = \frac{0{,}5 \cdot 9{,}17\ cm}{2{,}5\ cm} = 1{,}83$$

$$\Leftrightarrow\ \sphericalangle A_nD_nM_n = 61{,}40° < 65°$$

Aufgab B2:

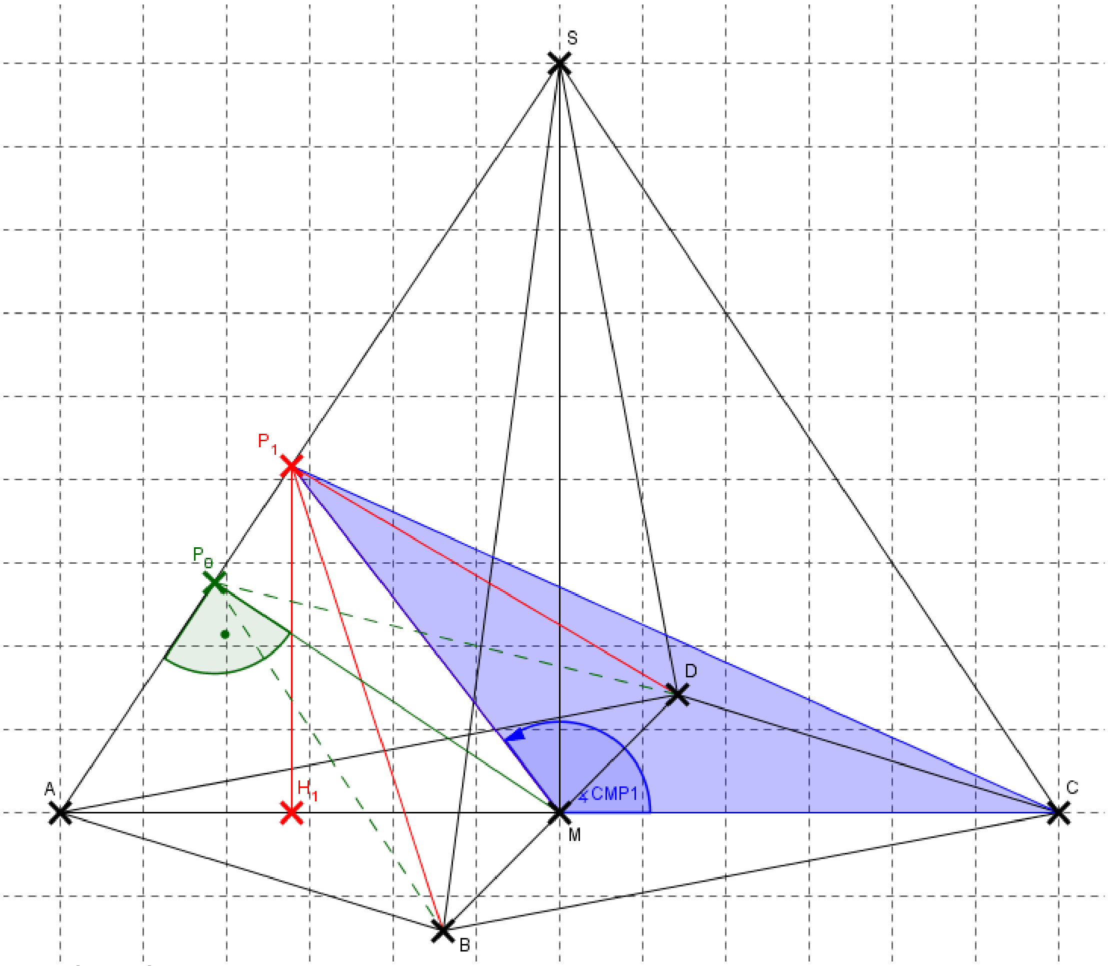
B 2.1

Dreieck AMS:

$$\overline{AS}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MS}^2 = (6\text{ cm})^2 + (9\text{ cm})^2 = 117\text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AS} = 10{,}82\text{ cm}$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{MS}}{\overline{AM}} = \frac{9\text{ cm}}{6\text{ cm}} = 1{,}5 \Leftrightarrow \alpha = 56{,}31°$$



B 2.2 (rot)

Kosinussatz im Dreieck AMP_1:

$$\overline{MP_1}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AP_1}^2 - 2\cdot\overline{AM}\cdot\overline{AP_1}\cdot\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP_1}^2 = (6^2 + 5^2 - 2\cdot6\cdot5\cdot\cos 56{,}31°)\text{ cm}^2 = 27{,}72\text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP_1} = 5{,}26\text{ cm}$$

Dreieck AH_1P_1:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{H_1P_1}}{\overline{AP_1}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{H_1P_1} = \sin\alpha\cdot\overline{AP_1} = \sin 56{,}31°\cdot 5\text{ cm} = 4{,}16\text{ cm}$$

$$V_{ADBP1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{H_1P_1}$$

$$\Leftrightarrow V_{ADBP1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4{,}16 \text{ cm}^3 = 33{,}28 \text{ cm}^3$$

B 2.3

$$V_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{MS}$$

$$\Leftrightarrow V_{ADBP1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot 9 \text{ cm}^3 = 144 \text{ cm}^3$$

$$\frac{33{,}28}{144} \approx 0{,}2311 = 23{,}11\ \%$$

B 2.4 (blau)

Schneller Weg mit der Höhe außerhalb: $A_{MCP1} = 0{,}5 \cdot \overline{H_1P_1} \cdot \overline{MC}$

Wer das nicht sieht: Gesucht ist vor allem der Winkel $\sphericalangle CMP_1$ bei M. Dreieck H_1MP_1:

$$\sin \sphericalangle P_1MH_1 = \frac{\overline{H_1P_1}}{\overline{MP_1}} = \frac{4{,}16 \text{ cm}}{5{,}26 \text{ cm}} = 0{,}79 \Leftrightarrow \sphericalangle P_1MH_1 = 52{,}27°$$

Damit ist $\sphericalangle SMP_1 = 90° - 52{,}27° = 37{,}73°$

Damit ist $\sphericalangle CMP_1 = 37{,}73° + 90° = 127{,}73°$

$$A_{MCP1} = 0{,}5 \cdot \overline{MP_1} \cdot \overline{MC} \cdot \sin 127{,}73°$$

$$\Leftrightarrow A_{MCP1} = 0{,}5 \cdot 5{,}26 \cdot 6 \cdot \sin 127{,}73° \text{ cm}^2 = 12{,}48 \text{ cm}^2$$

B 2.5 (grün)

Minimale Länge bedeutet “Abstand” und es entsteht ein praktischer 90°-Winkel.

Dreieck AMP_0:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{MP_0}}{\overline{AM}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP_0} = \sin \alpha \cdot \overline{AM} = \sin 56{,}31° \cdot 6 \text{ cm} = 4{,}99 \text{ cm}$$

Da $\overline{MP_0} = 4{,}99$ cm die kleinste Höhe aller Dreiecke BDP_n ist, wird hier der minimale Flächeninhalt erreicht.

Also:

$$A = 0{,}5 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{MP_0}$$

$$\Leftrightarrow A = 0{,}5 \cdot 8 \cdot 4{,}99 \text{ cm} = 19{,}96 \text{ cm}^2 > 18 \text{ cm}^2$$