Abschlussprüfung 2013
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Nachtermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 09.06.2017

Aufgabe A1

$\overline{M_1E} = 25\text{ cm}$ $\overline{FE} = 10\text{ cm}$ Damit ist $\overline{M_1F} = 15\text{ cm}$

Dreieck M_1AF:

$$\cos \sphericalangle AM_1F = \frac{\overline{M_1F}}{\overline{M_1A}} = \frac{15}{25} = 0{,}6$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle AM_1F = 53{,}13°$ und damit $\sphericalangle AM_1D = 106{,}26°$

$$\sin \sphericalangle AM_1F = \frac{\overline{AF}}{\overline{M_1A}}$$

$\Leftrightarrow \overline{AF} = \sin \sphericalangle AM_1F \cdot \overline{M_1A}$

$\Leftrightarrow \overline{AF} = \sin 53{,}13° \cdot 25\text{ cm} = 20\text{ cm}$ und damit $\overline{AD} = 40\text{ cm}$

$$A = 2 \cdot A_{SektorDM1A} + A_{ABCD} + 2 \cdot A_{M1AD}$$

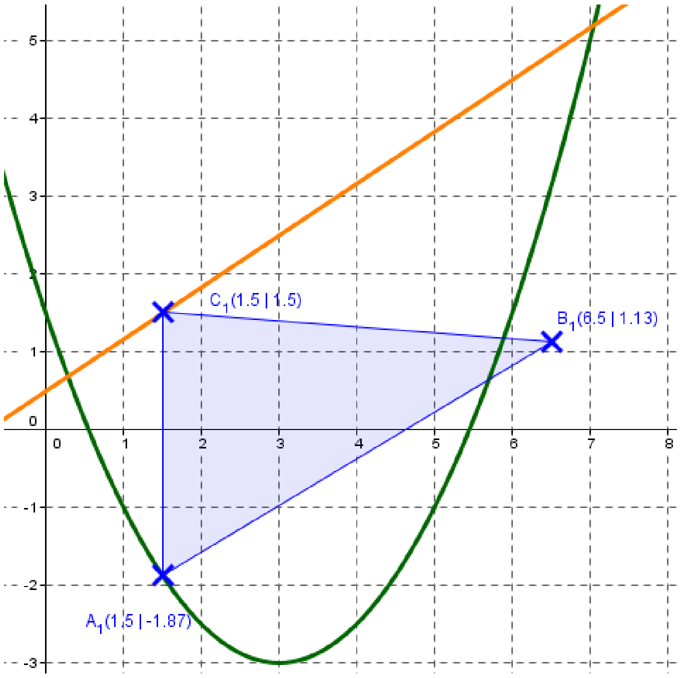
$$\Leftrightarrow A = 2 \cdot \overline{M_1E}^2 \cdot \pi \cdot \frac{360° - 106{,}26°}{360°} + \overline{AB} \cdot \overline{AD} + 2 \cdot 0{,}5 \cdot \overline{M_1A}^2 \cdot \sin 106{,}26°$$

$$\Leftrightarrow A = \left(2 \cdot 25^2 \cdot \pi \cdot \frac{253{,}74°}{360°} + 20 \cdot 40 + 25^2 \cdot \sin 106{,}26°\right)\text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow A = 4167{,}87\text{ cm}^2$$

Aufgabe A2 $p\colon y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 3$ $g\colon y = \frac{2}{3}x + 0{,}5$

A 2.1 und A 2.2



A 2.3

$$\overline{A_nC_n}(x) = \sqrt{(x - x)^2 + (\frac{2}{3}x + 0{,}5 - (\frac{1}{2}(x - 3)^2 - 3))^2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_nC_n}(x) = (\frac{2}{3}x + 0{,}5 - (\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) - 3))\ \text{LE}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_nC_n}(x) = (\frac{2}{3}x + 0{,}5 - (\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4{,}5 - 3))\ \text{LE}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_nC_n}(x) = (\frac{2}{3}x + 0{,}5 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{3}x - 1{,}5)\ \text{LE}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_nC_n}(x) = (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{3}x - 1)\ \text{LE}$$

A 2.4

Da $\overrightarrow{A_nB_n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist die Höhe immer 5 LE. Also:

$$A(x) = [\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{3}x - 1)]\ \text{FE}$$

$$\Leftrightarrow A(x) = (-\frac{5}{4}x^2 + \frac{55}{6}x - 2{,}5)]\ \text{FE}$$

Also: $A(x) = -\frac{5}{4}(x^2 + \frac{22}{3}x) - 2{,}5$

$$\Leftrightarrow A(x) = -\frac{5}{4}(x^2 + \frac{22}{3}x + (\frac{22}{6})^2 - (\frac{22}{6})^2) - 2{,}5$$

$$\Leftrightarrow A(x) = -\frac{5}{4}(x - \frac{22}{6})^2 + 14{,}31$$

Damit ist $A_{max} = 14{,}31$ FE für $x = \frac{22}{6} = 3{,}67$.

Aufgabe A3

A 3.1

Kosinus-Satz im Dreieck DFC:

$$\overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FC}^2 - 2 \cdot \overline{DF} \cdot \overline{FC} \cdot \cos \sphericalangle CFD$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = (9{,}5^2 + 9{,}5^2 - 2 \cdot 9{,}5 \cdot 9{,}5 \cdot \cos 104°)\ cm^2 = 224{,}17\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD} = 15{,}0\ cm$$

Dreieck EFM:

$$\sin \sphericalangle MFE = \frac{\overline{EM}}{\overline{EF}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EM} = \sin \sphericalangle MFE \cdot \overline{EF} = \sin 52° \cdot 3{,}8\ cm = 3{,}00\ cm$$

A 3.2

Dreieck EAM:

$$\overline{EA}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{AM}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{EA}^2 = (3^2 + 14{,}5^2)\ cm^2 = 219{,}25\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{EA} = 14{,}8\ cm$$

$$A_{Grundkreis} = \overline{DN}^2 \cdot \pi = (7{,}5^2 \cdot \pi)\ cm^2$$

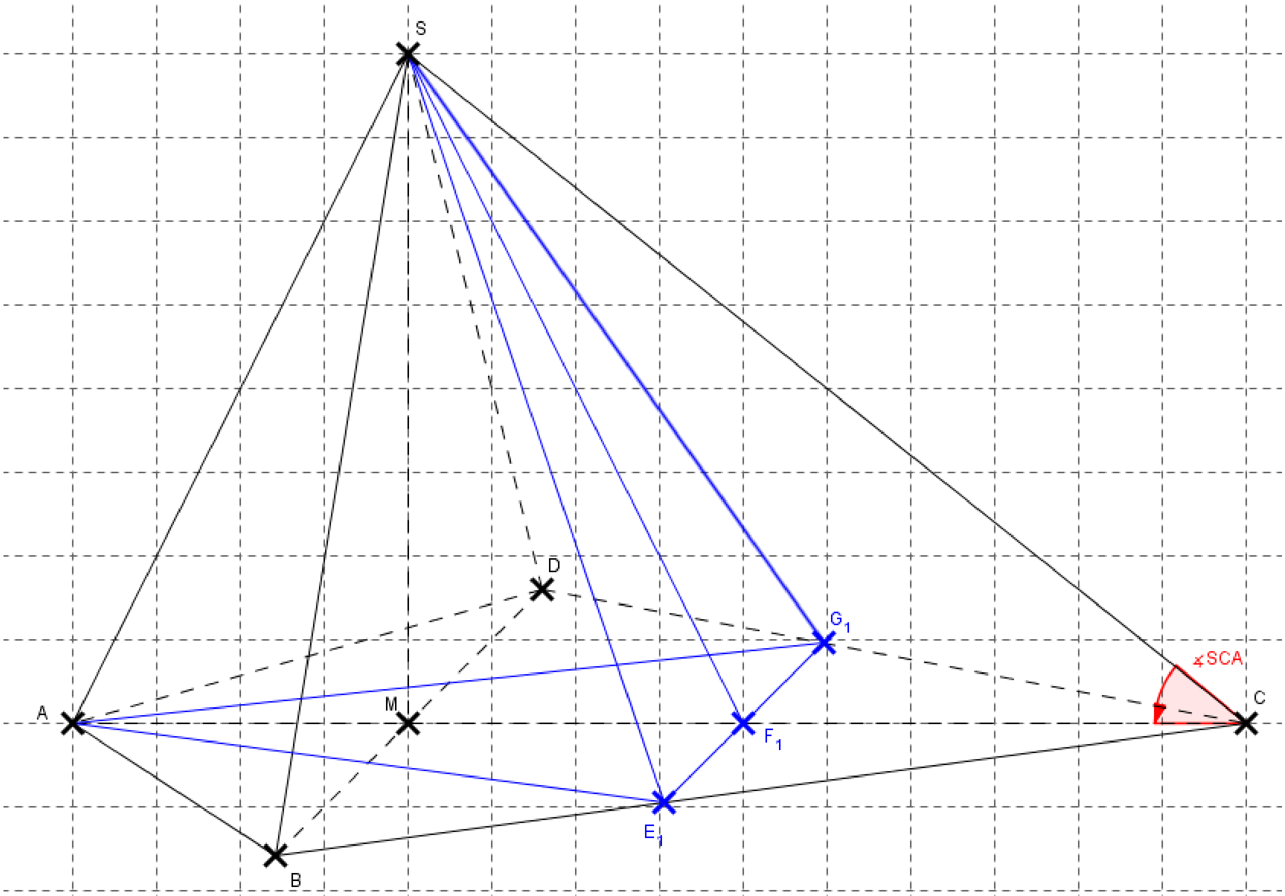
$$M_{KegelstumpfDEBC} = \overline{DN} \cdot \overline{DF} \cdot \pi - \overline{EM} \cdot \overline{EF} \cdot \pi = (7{,}5 \cdot 9{,}5 - 3 \cdot 3{,}8) \cdot \pi\ cm^2$$

$$M_{KegelEAB} = \overline{EM} \cdot \overline{EA} \cdot \pi = (3 \cdot 14{,}8 \cdot \pi)\ cm^2$$

$$O = (7{,}5^2 \cdot \pi + (7{,}5 \cdot 9{,}5 - 3 \cdot 3{,}8) \cdot \pi + 3 \cdot 14{,}8 \cdot \pi)\ cm^2 = 504{,}2\ cm^2$$

Aufgabe B1

B 1.1



Dreieck MCS:

$$\overline{CS}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MS}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{CS}^2 = (10^2 + 8^2)\ cm^2 = 164\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{CS} = 12{,}81\ cm$$

$$\tan \sphericalangle SCA = \frac{\overline{MS}}{\overline{MC}} = \frac{8}{10} = 0{,}8 \quad \Leftrightarrow \sphericalangle SCA = 38{,}66°$$

B 1.2

Vierstreckensatz im Bereich BCD:

$$\frac{\overline{E_nG_n}(x)}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CF_n}(x)}{\overline{CM}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{E_nG_n}(x) = \frac{\overline{CF_n}(x) \cdot \overline{BD}}{\overline{CM}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{E_nG_n}(x) = \frac{(10 - x) \cdot 9}{10}\ cm$$

$$\Leftrightarrow \overline{E_nG_n}(x) = \frac{90 - 9x}{10}\ cm = (-0{,}9x + 9)\ cm$$

B 1.3

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AF_n}(x) \cdot \overline{E_nG_n}(x) \cdot \overline{MS}$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{6} \cdot (4 + x) \cdot (-0,9x + 9) \cdot 8 \text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{8}{6} \cdot (-3,6x - 0,9x^2 + 36 + 9x) \text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow V(x) = (-1,2x^2 + 7,2x + 48) \text{ cm}^3$$

B 1.4

$$V(x) = -1,2x^2 + 7,2x + 48$$
$$\Leftrightarrow V(x) = -1,2(x^2 - 6x) + 48$$
$$\Leftrightarrow V(x) = -1,2(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 48$$
$$\Leftrightarrow V(x) = -1,2(x - 3)^2 + 58,8$$

Damit ist $V_{max} = 58,8 \text{ cm}^3$ für $x = 3$.

B 1.5

$$V_{alles} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{MS}$$

$$\Leftrightarrow V_{alles} = \frac{1}{6} \cdot 14 \cdot 9 \cdot 8 \text{ cm}^3 = 168 \text{ cm}^3$$

25(!) % von 168 cm³ sind 42 cm³

Also:

$$42 = -1,2x^2 + 7,2x + 48$$
$$\Leftrightarrow -1,2x^2 + 7,2x + 6 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-7,2 \pm \sqrt{7,2^2 - 4 \cdot (-1,2) \cdot 6}}{2 \cdot (-1,2)} = \frac{-7,2 \pm \sqrt{80,64}}{-2,4}$$

$x_1 = 6,74$ $(\vee\ x_2 = -0,74)$ $\mathbb{L} = \{6,74\}$

B 1.6

Sinus-Satz im Dreieck F_4CS:

$$\frac{\overline{F_4C}}{\sin \sphericalangle F_4SC} = \frac{\overline{CS}}{\sin \sphericalangle CF_4S}$$

$$\overline{F_4C} = \frac{\overline{CS} \cdot \sin \sphericalangle F_4SC}{\sin \sphericalangle CF_4S} = \frac{12,81 \cdot \sin 38,66°}{\sin (180° - 2 \cdot 38,66°)} \text{ cm} = 8,20 \text{ cm}$$

Damit ist x = 10 − 8,20 = 1,80

Wer das nicht sofort sieht: Die angegebenen Ergebnisse aus 1.1 wurden noch nicht verwendet, das muss ja einen Grund haben, warum die angegeben worden sind!

Andere Variante ohne die Ergebnisse aus 1.1:

Die Strecken $\overline{F_4C} = (10 - x)$ cm und $\overline{F_4S} = \sqrt{x^2 + 8}$ cm (Pythagoras im Dreieck MF_4S) gleichsetzen.

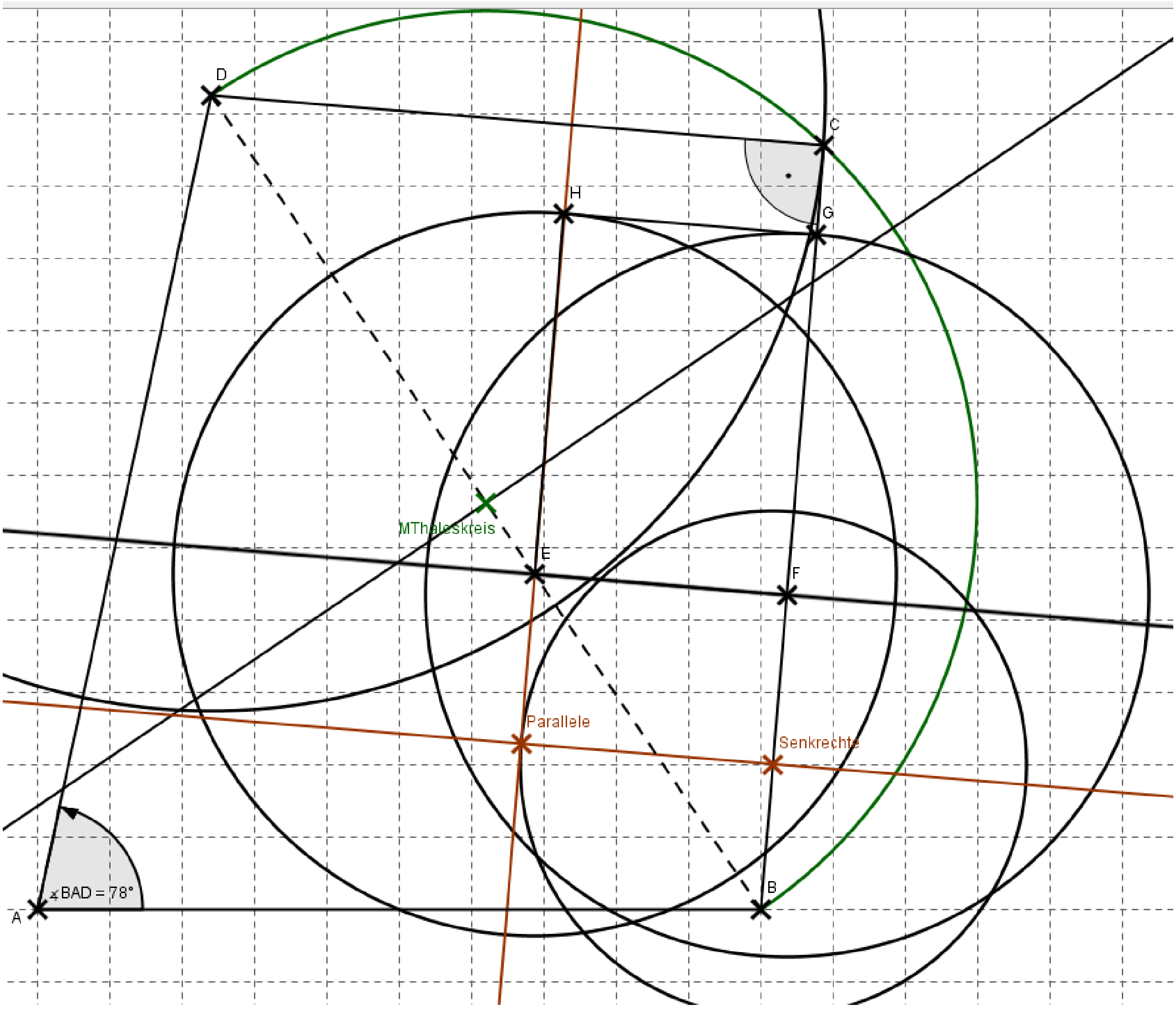
Aufgabe B2

B 2.1

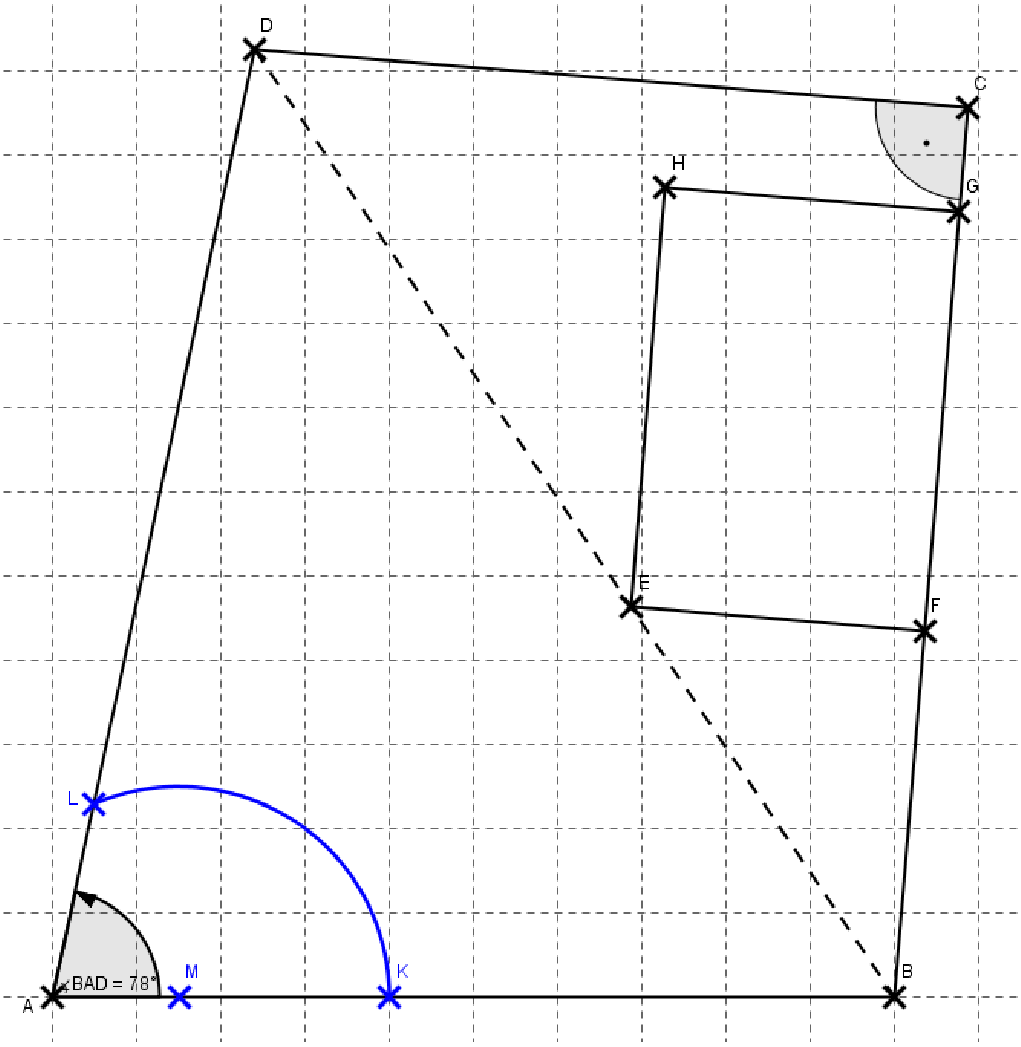
Konstruktion von C über den Thaleskreis (grün) um den Mittelpunkt von [BD].

Konstruktion von E über eine Parallele zu [BC] (braun) im Abstand von 3,5 cm.

Vollständige Konstruktion:



Zeichnung ohne Konstruktionsschritte:



B 2.2

Kosinus-Satz im Dreieck ABD:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \sphericalangle BAD$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = (23^2 + 20^2 - 2 \cdot 23 \cdot 20 \cdot \cos 78°)\ m^2 = 737{,}72\ m^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 27{,}16\ m$$

Dreieck BCD:

$$\sin \sphericalangle CBD = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{17}{27{,}16} = 0{,}63 \quad \Leftrightarrow \sphericalangle CBD = 38{,}75°$$

Dreieck BFE:

$$\sin \sphericalangle CBD = \frac{\overline{EF}}{\overline{BE}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{\overline{EF}}{\sin \sphericalangle CBD} = \frac{7}{\sin 38{,}75°}\ m = 11{,}18\ m$$

B 2.3

Dreieck BCD:

$$\tan \sphericalangle CBD = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{DC}}{\tan \sphericalangle CBD} = \frac{17}{\tan 38{,}75°}\ m = 21{,}18\ m$$

Dreieck BFE:

$$\tan \sphericalangle CBD = \frac{\overline{EF}}{\overline{BF}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BF} = \frac{\overline{EF}}{\tan \sphericalangle CBD} = \frac{7}{\tan 38{,}75°}\ m = 8{,}72\ m$$

Damit ist $\overline{GC} = \overline{BC} - \overline{BF} - \overline{FG} = 21{,}18\ m - 8{,}72\ m - 10\ m = 2{,}46\ m$

B 2.4

Sinus-Satz im Dreieck AML:

$$\frac{\sin \sphericalangle ALM}{\overline{AM}} = \frac{\sin \sphericalangle BAD}{\overline{ML}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle ALM = \frac{\sin \sphericalangle BAD \cdot \overline{AM}}{\overline{ML}} = \frac{\sin 78° \cdot 3}{5} = 0{,}59$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle ALM = 35{,}94°$

Also: $\sphericalangle LMA = 180° - 78° - 35{,}94° = 66{,}06°$

Damit ist $\sphericalangle KML = 180° - 66{,}06° = 113{,}94°$

$$A_{Teich} = A_{AML} + A_{MKL}$$

$$\Leftrightarrow A_{Teich} = 0{,}5 \cdot \overline{ML} \cdot \overline{MA} \cdot \sin \sphericalangle LMA + \overline{MK}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle KML}{360°}$$

$$\Leftrightarrow A_{Teich} = (0{,}5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 66{,}06° + 5^2 \cdot \pi \cdot \frac{113{,}94°}{360°})\ m^2$$

$$\Leftrightarrow A_{Teich} = 31{,}71\ m^2$$

B 2.5

$$A_{Gesamt} = A_{ABD} + A_{BCD}$$

$$\Leftrightarrow A_{Gesamt} = 0{,}5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \sin \sphericalangle BAD + 0{,}5 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD}$$

$$\Leftrightarrow A_{Gesamt} = (0{,}5 \cdot 20 \cdot 23 \cdot \sin 78° + 0{,}5 \cdot 21{,}18 \cdot 17)\ m^2$$

$$\Leftrightarrow A_{Gesamt} = 405\ m^2$$

$$A_{Haus} = \overline{EF} \cdot \overline{FG} = (7 \cdot 10)\ m^2 = 70\ m^2$$

$$A_{Restfläche} = A_{Gesamt} - A_{Teich} - A_{Haus}$$

$$\Leftrightarrow A_{Restfläche} = 405\ m^2 - 31{,}71\ m^2 - 70\ m^2 = 303{,}29\ m^2$$

$303{,}29 : 405 \cdot 100\ \% = 75\ \%$