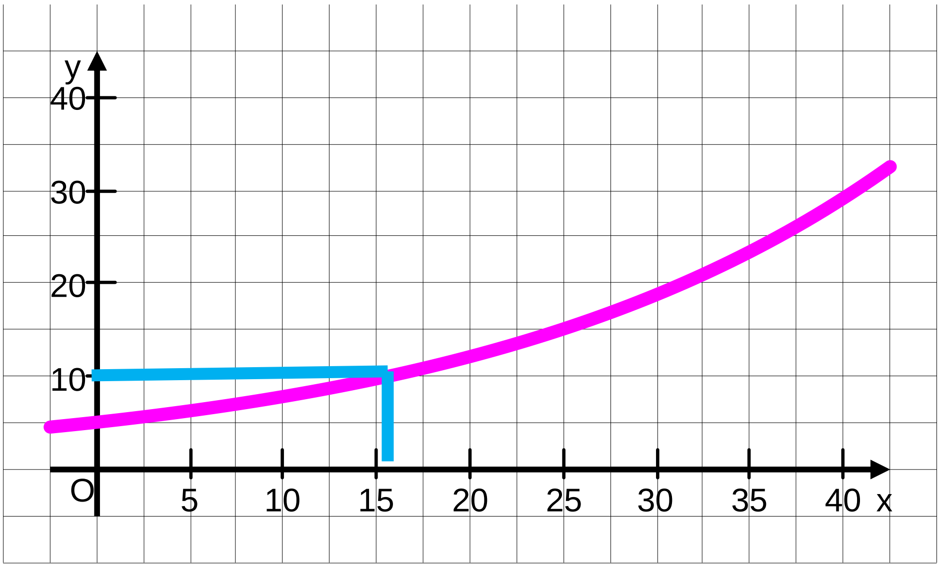
# Abschlussprüfung 2011
# an den Realschulen in Bayern
## Mathematik II Haupttermin
## Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 12.12.2017

Aufgabe A1

1.1

| x | 0 | 10 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5000 \cdot 1{,}045^x$ | 5000 | 8000 | 12000 | 15000 | 19000 | 23000 | 29000 |

y-Achse in Tausendern




1.2
Blaue Linie: Nach knapp 16 Jahren.

Zweig I
$10000 = 5000 \cdot 1{,}045^x$
$2 = 1{,}045^x$
$x = \log_{1{,}045} 2 = 15{,}75 \quad \mathbb{L} = \{15{,}75\}$

1.3
$x = 32$
$y = 5000 \cdot 1{,}045^{32} = 20450$
$20450 - 5000 = 15450$
Der Bestand ist um 15450 m³ gestiegen.

Aufgabe A2:

2.1
Dreieck MAB:

$\overline{BM}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AM}^2$

$\Leftrightarrow \overline{BM}^2 = (10\ cm)^2 - (4\ cm)^2 = 84\ cm^2$

$\Leftrightarrow \overline{BM} = 9{,}17\ cm$

Dreieck BMS:

$\overline{BS}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MS}^2$

$\Leftrightarrow \overline{BS}^2 = (9{,}17\ cm)^2 + (9\ cm)^2 = 165{,}09\ cm^2$

$\Leftrightarrow \overline{BS} = 12{,}85\ cm$

$\tan \sphericalangle MBS = \frac{\overline{MS}}{\overline{BM}} = \frac{9\ cm}{9{,}17\ cm} = 0{,}98 \quad \Leftrightarrow \sphericalangle MBS = 44{,}46°$

2.2

$A_G = 0{,}5 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{MS} = 0{,}5 \cdot 8\ cm \cdot 9\ cm = 36\ cm^2$

$\frac{\overline{F_1P_1}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{SP_1}}{\overline{SB}} \Leftrightarrow \overline{F_1P_1} = \frac{\overline{SP_1} \cdot \overline{BM}}{\overline{SB}}$

$\Leftrightarrow \overline{F_1P_1} = \frac{(12{,}85\ cm - 4\ cm) \cdot 9{,}17\ cm}{12{,}85\ cm} = 6{,}32\ cm$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot \overline{F_1P_1} = \frac{1}{3} \cdot 36\ cm^2 \cdot 6{,}32\ cm = 75{,}84\ cm^3$

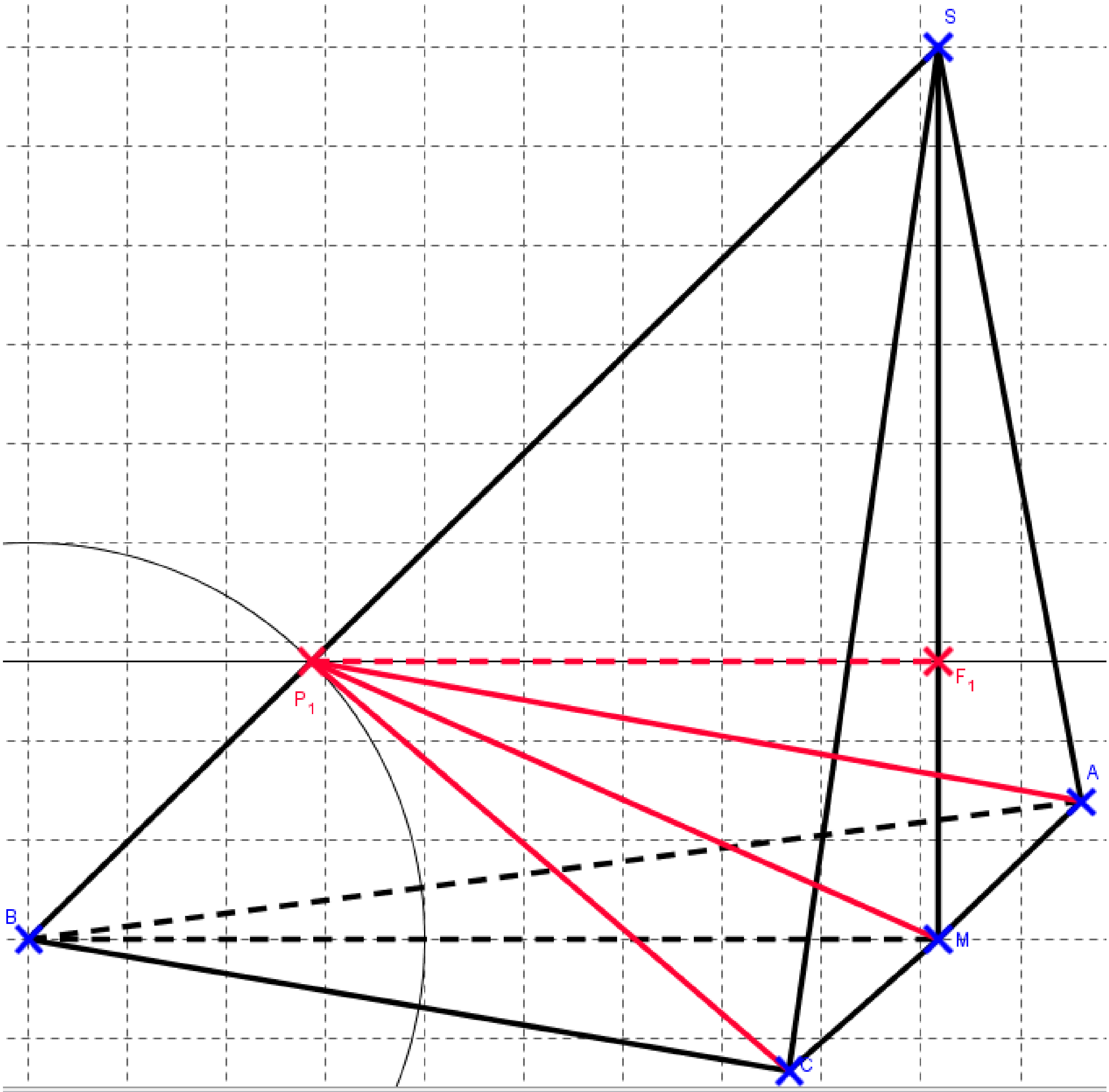
2.3
Dreieck $BMP_n$ – Kosinussatz:

$\overline{MP_n}^2 = \overline{BP_n}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \cdot \overline{BP_n} \cdot \overline{BM} \cdot \cos \sphericalangle MBS$

$\Leftrightarrow \overline{MP_n}^2 = (x^2 + 9{,}17^2 - 2 \cdot x \cdot 9{,}17 \cdot \cos 44{,}46°)\ cm^2$

$\Leftrightarrow \overline{MP_n}^2 = (x^2 + 84{,}09 - 13{,}09x)\ cm^2$

$\Leftrightarrow \overline{MP_n} = \sqrt{x^2 - 13{,}09x + 84{,}09}\ cm$


S
P1
F1
A
B
M
C

Aufgabe A3:
Vorgehen: Berechnung von $A_{Dreieck}$, dann gleichsetzen mit Rechteck
Vorarbeit: Berechnung eines Winkels mit dem Kosinussatz
a = 60 m    b = 70 m    c = 80 m
Hier gibt es drei Möglichkeiten:

a) Berechnung des Winkels γ ggü. der 80-Meter-Seite

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$
$$\Leftrightarrow \cos \gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2 \cdot a \cdot b} = \frac{80^2 - 60^2 - 70^2}{-2 \cdot 60 \cdot 70} = 0{,}25$$
$$\Leftrightarrow \gamma = 75{,}52°$$

$A = 0{,}5 \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = 0{,}5 \cdot 60\ m \cdot 70\ m \cdot \sin 75{,}52° = 2033{,}29\ m^2$

Rechteck: Breite = x   Länge = 1,5x

Gleichsetzen:

$x \cdot 1{,}5x = 2033{,}29\ m^2 \Leftrightarrow 1{,}5x^2 = 2033{,}29\ m^3 \Leftrightarrow x^2 = 1355{,}53\ m^2$

Breite = 36,82 m  und Länge = 55,23 m

b) Berechnung des Winkels γ ggü. der 70-Meter-Seite

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$
$$\Leftrightarrow \cos \beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2 \cdot a \cdot c} = \frac{70^2 - 60^2 - 80^2}{-2 \cdot 60 \cdot 80} = 0{,}53$$
$$\Leftrightarrow \beta = 57{,}91°$$

$A = 0{,}5 \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta = 0{,}5 \cdot 60\ m \cdot 80\ m \cdot \sin 57{,}91° = 2033{,}32\ m^2$

$x \cdot 1{,}5x = 2033{,}32\ m^2 \Leftrightarrow 1{,}5x^2 = 2033{,}32\ m^3 \Leftrightarrow x^2 = 1355{,}55\ m^2$

Breite = 36,82 m  und Länge = 55,23 m

c) Berechnung des Winkels α ggü. der 60-Meter-Seite

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$
$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c} = \frac{60^2 - 70^2 - 80^2}{-2 \cdot 70 \cdot 80} = 0{,}69$$
$$\Leftrightarrow \alpha = 46{,}57°$$

$A = 0{,}5 \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = 0{,}5 \cdot 70\ m \cdot 80\ m \cdot \sin 46{,}57° = 2033{,}40\ m^2$

$x \cdot 1{,}5x = 2033{,}40\ m^2 \Leftrightarrow 1{,}5x^2 = 2033{,}40\ m^3 \Leftrightarrow x^2 = 1355{,}60\ m^2$

Breite = 36,82 m  und Länge = 55,23 m

Aufgabe B1:

1.1 P(5 | -1) Q(-2 | 0,75)  **g: $y = -0{,}5x + 5$**

p: $y = ax^2 + bx + 2{,}75$

I $-1 = a(5)^2 + bx + 2{,}75$

$\Leftrightarrow -1 = 25a + 5b + 2{,}75$

$\Leftrightarrow 25a = -3{,}75 - 5b$

$\Leftrightarrow a = -0{,}15 - 0{,}2b$

II $0{,}75 = a(-2)^2 - 2b + 2{,}75$

$\Leftrightarrow 0{,}75 = 4a - 2b + 2{,}75$

$\Leftrightarrow 4a = -2 + 2b$

$\Leftrightarrow a = -0{,}5 + 0{,}5b$

I = II

$-0{,}15 - 0{,}2b = -0{,}5 + 0{,}5b$

$\Leftrightarrow 0{,}7b = 0{,}35$

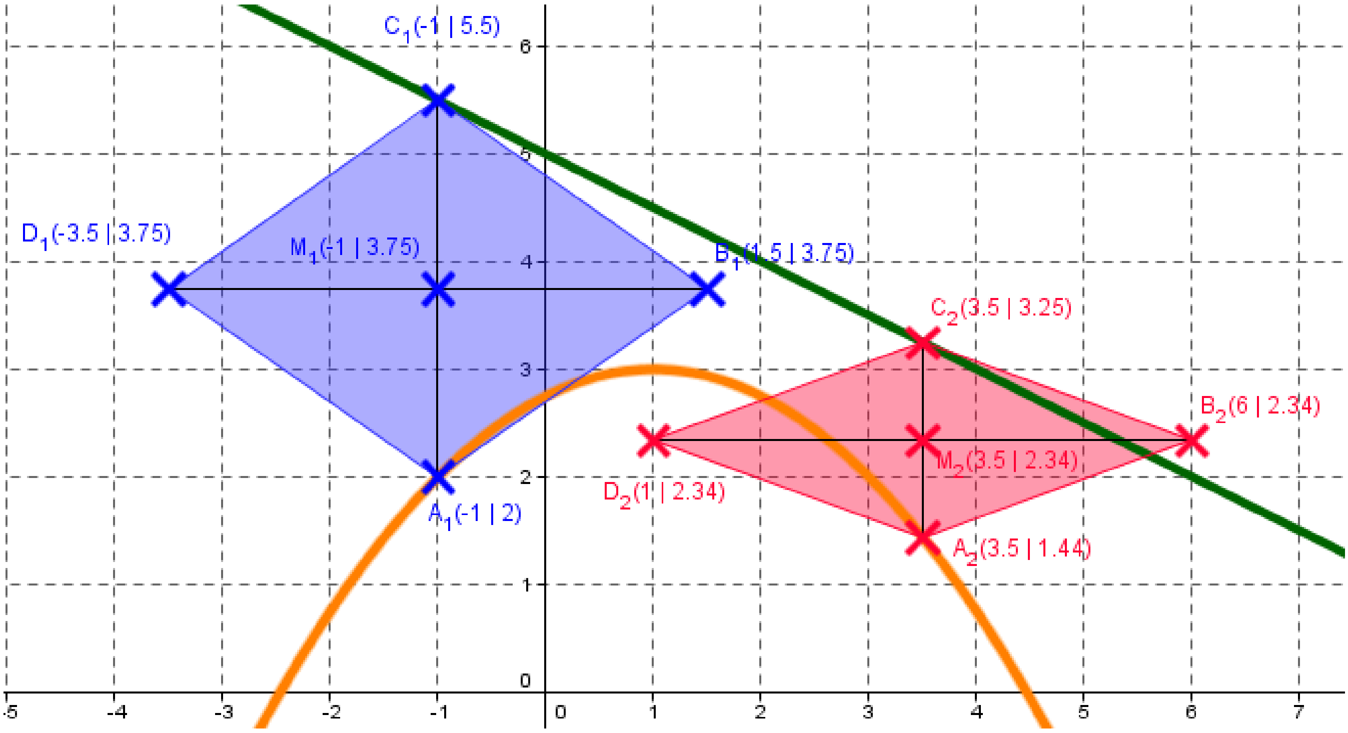
$\Leftrightarrow b = 0{,}5$ und $a = -0{,}15 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 = -0{,}25$

Also: **p: $y = -0{,}25x^2 + 0{,}5x + 2{,}75$**

1.2

**$A_1(-1|2)$ $B_1(1{,}5|3{,}75)$ $C_1(-1|5{,}5)$ $D_1(-3{,}5|3{,}75)$**

**$A_2(3{,}5|1{,}4375)$ $B_2(6|2{,}34375)$ $C_2(3{,}5|3{,}25)$ $D_2(6|2{,}34375)$**



1.3

$\overline{A_nC_n} = \sqrt{(x - x)^2 + (\mathbf{-0{,}5x + 5} - (\mathbf{-0{,}25x^2+0{,}5x+2{,}75}))^2}$ cm

$\Leftrightarrow \overline{A_nC_n} = \sqrt{(0{,}25x^2 - x + 2{,}25)^2}$ cm

$\Leftrightarrow \overline{A_nC_n} = (0{,}25x^2 - x + 2{,}25)$ cm

1.4

$T(x) = 0{,}25x^2 - x + 2{,}25$

$\Leftrightarrow T(x) = 0{,}25(x^2 - 4x) + 2{,}25$

$\Leftrightarrow T(x) = 0{,}25(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) + 2{,}25$

$\Leftrightarrow T(x) = 0{,}25(x - 2)^2 + 1{,}25$

Für $x = 2$ ist die minimale Länge von $\overline{A_nC_n} = 1{,}25$ cm.

$A_{Raute} = 0{,}5 \cdot \overline{A_nC_n} \cdot \overline{BD}$

$\Leftrightarrow 3 = 0{,}5 \cdot 5 \cdot (0{,}25x^2 - x + 2{,}25)$

$\Leftrightarrow 1{,}2 = 0{,}25x^2 - x + 2{,}25$

$\Leftrightarrow 0{,}25x^2 - x + 1{,}05$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot 1{,}05}}{2 \cdot 0{,}25} =$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 1{,}05}}{0{,}5}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \varnothing$, da der Wert unter der Wurzel kleiner 0 ist.

Andere Möglichkeit:

Wenn $\overline{A_nC_n}$ minimal ist, so haben wir auch den minimalen Flächeninhalt.

Also: $A_{Raute} = 0{,}5 \cdot \overline{A_nC_n} \cdot \overline{BD} = 0{,}5 \cdot 1{,}25\text{cm} \cdot 5\text{cm} = 3{,}125\ \text{cm}^2 > 3\ \text{cm}^2$

1.5

$\overline{A_nC_n} = 5$ cm

Also: $0{,}25x^2 - x + 2{,}25 = 5$

$\Leftrightarrow 0{,}25x^2 - x - 2{,}75 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot (-2{,}75)}}{2 \cdot 0{,}25}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{3{,}75}}{0{,}5} \Rightarrow x_1 = 5{,}87 \text{ und } x_2 = -1{,}87 \quad \mathbb{L} = \{-1{,}87;\ 5{,}87\}$$

**$A_3(-1{,}87|0{,}94)$ $A_4(5{,}87|-2{,}93)$**

1.6

Mittelpunkt einer Strecke: M $\left(\frac{x_A + x_B}{2} \middle| \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Der x-Wert spielt zuerst keine Rolle.

y-Wert vom Mittelpunkt der Strecken $\overline{A_nC_n}$ :

$\frac{y_A + y_B}{2} = (\mathbf{-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 2{,}75} + (\mathbf{-0{,}5x + 5})) : 2$

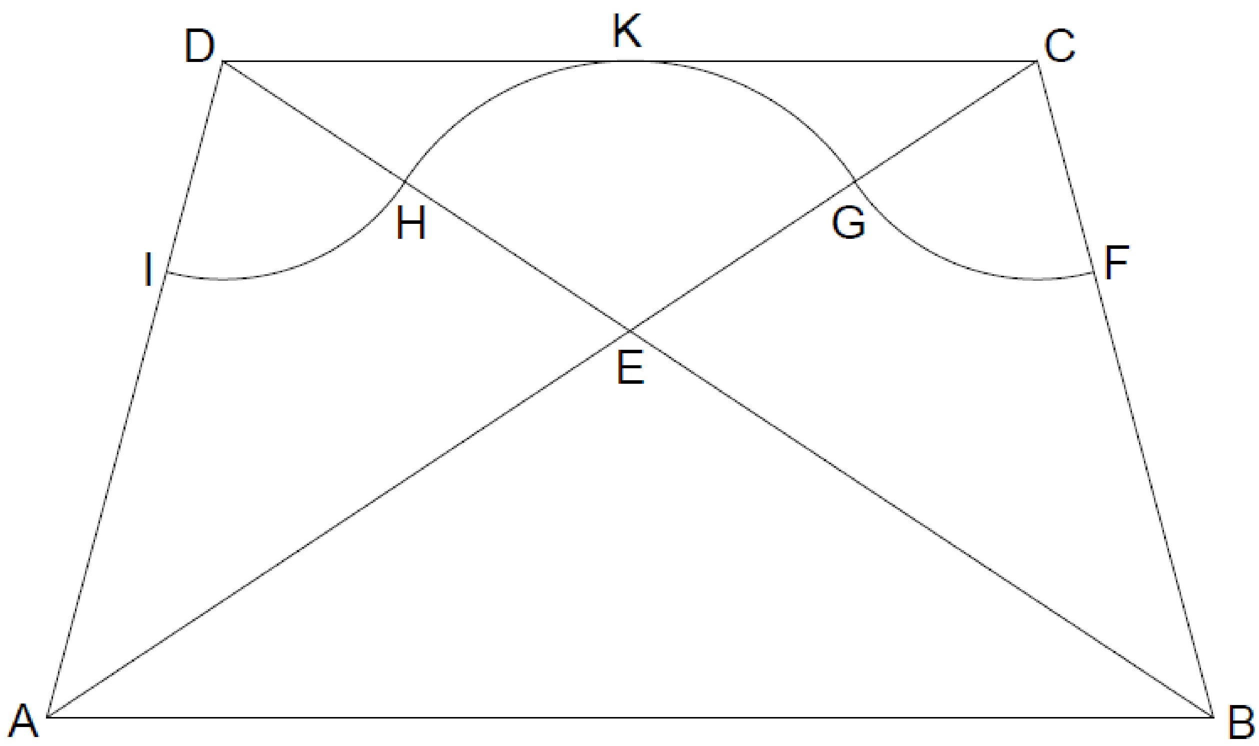
$\Leftrightarrow (-0{,}25x^2 + 7{,}75) : 2 = -0{,}125x^2 + 3{,}875$

Dieser y-Wert von M muss nun 0 sein, damit er auf der x-Achse liegt:
$-0{,}125x^2 + 3{,}875 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot (-0{,}125) \cdot 3{,}875}}{2 \cdot (-0{,}125)}$

$= \frac{\pm \sqrt{1{,}9375}}{-0{,}25} \Rightarrow x_1 = 5{,}57$ und $x_2 = -5{,}57$ $\mathbb{L} = \{-5{,}57; 5{,}57\}$

Aufgabe B2:
2.1



2.2

Dreieck ABC (Trapez ist gleichschenklig, daher $\overline{BC} = \overline{AD}$ und $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAD$):

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \sphericalangle CBA$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (60^2 + 35^2 - 2 \cdot 60 \cdot 35 \cdot \cos 75°)\ cm^2 = 3737{,}96\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 61{,}1\ cm$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \sphericalangle BAC} = \frac{\overline{AC}}{\sin \sphericalangle CBA} \Leftrightarrow \sin \sphericalangle BAC = \frac{\overline{BC} \cdot \sin \sphericalangle CBA}{\overline{AC}}$$

$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle BAC = \dfrac{35\ cm \cdot \sin 75°}{61{,}1\ cm} = 0{,}55 \Leftrightarrow \sphericalangle BAC = 33{,}6°$ [146,4° nicht möglich, da bereits ein Winkel mit 75° vorhanden ist (Winkelsumme im Dreieck)]

Dreieck ACD:

$\sphericalangle CAD = 75° - \sphericalangle BAC = 75° - 33{,}6° = 41{,}4°$

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \sphericalangle CAD$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = (35^2 + 61{,}1^2 - 2 \cdot 35 \cdot 61{,}1 \cdot \cos 41{,}4°)\ cm^2 = 1749{,}98\ cm^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD} = 41{,}8\ cm$$

2.3

Dreieck ABC:

$\sphericalangle ACB = 180° - 75° - 33{,}6° = 71{,}4°$

$\sphericalangle DCA = 180° - 75° - 71{,}4° = 33{,}6°$

Dreieck ECK:

$$\tan \sphericalangle DCA = \frac{\overline{EK}}{\overline{KC}} \Leftrightarrow \overline{EK} = \tan \sphericalangle DCA \cdot \overline{KC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{EK} = \tan 33{,}6° \cdot (41{,}8\ cm : 2) = 13{,}9\ cm$$

$\sphericalangle CEK = 180° - 90° - 33{,}6° = 56{,}4°$

$\sphericalangle CED = 56{,}4° \cdot 2 = 112{,}8°$

$$A_{Sektor} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{112{,}8°}{360°} = (13{,}9\ cm)^2 \cdot \pi \cdot \frac{112{,}8°}{360°} = 190{,}2\ cm^2$$

2.4

$\overset{\frown}{GH} = 2r \cdot \pi \cdot \frac{112,8°}{360°} = 2 \cdot (13,9\ cm) \cdot \pi \cdot \frac{112,8°}{360°} = \underline{27,4\ cm}$

Dreieck ECK:

$\overline{EC}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{KC}^2 = (13,9^2 + 20,9^2)\ cm^2 = 630,02\ cm^2$

$\Leftrightarrow \overline{EC} = 25,1\ cm$

$\overline{CG} = \overline{EC} - \overline{EK} = 25,1\ cm - 13,9\ cm = 11,2\ cm$

$\overset{\frown}{GF} = 2r \cdot \pi \cdot \frac{\sphericalangle ACB}{360°} = 2 \cdot (11,2\ m) \cdot \pi \cdot \frac{180° - 75° - 33,6°}{360°} = \underline{14\ cm}$

$\overline{FB} = \overline{BC} - \overline{CF} = 35\ cm - 11,2\ cm = \underline{23,8\ cm}$

Umfang = $\overline{AB} + 2 \cdot \overline{FB} + 2 \cdot \overset{\frown}{GF} + \overset{\frown}{GH} =$

$60\ cm + 2 \cdot 23,8\ cm + 2 \cdot 14\ cm + 27,4\ cm = 163\ cm$

2.5

Vorgehen: Vom gesamten Trapez die fehlenden Stücke abziehen. Im Dreieck DEC fällt das schwer, so dass man das gesamte Dreieck abzieht und den Sektor danach wieder addiert.

$A_{DreieckABC} = 0,5 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \sphericalangle BAC$

$\Leftrightarrow A_{DreieckABC} = 0,5 \cdot 60\ cm \cdot 61,1\ cm \cdot \sin 33,6° = \underline{1014,4\ cm^2}$

$A_{DreieckACD} = 0,5 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \sphericalangle CAD$

$\Leftrightarrow A_{DreieckACD} = 0,5 \cdot 35\ cm \cdot 61,1\ cm \cdot \sin 41,4° = \underline{707,1\ cm^2}$

$A_{DreieckDEC} = 0,5 \cdot \overline{DC} \cdot \overline{EK} = 0,5 \cdot 41,8\ cm \cdot 13,9\ cm = \underline{290,5\ cm^2}$

$A_{SektorHEG} = \underline{190,2\ cm^2}$ (aus 2.3)

$A_{SektorGFC} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{180° - 75° - 33,6°}{360°} = (11,2\ cm)^2 \cdot \pi \cdot \frac{71,4°}{360°} = \underline{78,2\ cm^2}$

$A_{Set} = (1014,4 + 707,1 - 290,5 + 190,2 - 78,2 - 78,2)\ cm^2$

$\Leftrightarrow A_{Set} = 1464,8\ cm^2$

Kleine Rundungsunterschiede, wenn man die Gesamtfläche über die Dreiecke ABD und BCD berechnet.