Abschlussprüfung 2009
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Haupttermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 11.06.2024

Aufgabe A1

1.1

Sinus-Satz im Dreieck MPC:

$$\frac{\sin \sphericalangle PMC}{\overline{PC}} = \frac{\sin \sphericalangle MCP}{\overline{MP}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle PMC = \frac{\sin \sphericalangle PMC \cdot \overline{PC}}{\overline{MP}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle PMC = \frac{\sin 45° \cdot 40 \text{ cm}}{50 \text{ cm}} = 0{,}57$$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle PMC = 34{,}4°$$

1.2

Gesucht ist vor allem der Freiraum rechts oben. Dieser Freiraum ist die Differenz des Sektors von den Teildreiecken MPC und MCQ. Im Folgenden wird nur ein halber Freiraum berechnet und am Ende mit 2 multipliziert.

Zuerst brauchen wir ein paar Winkel:

$\sphericalangle AMP = 180° - 34{,}4° = 145{,}6°$

$\sphericalangle MPB = 360° - 145{,}6° - 45° - 90° = 79{,}4°$

$\sphericalangle CPM = 180° - 79{,}4° = 100{,}6°$

Jetzt haben wir alles, was wir brauchen und können in die Formeln einsetzen:

$$A_{halberSektor} = \overline{MP}^2 \cdot \pi \cdot \frac{34{,}4°}{360°}$$

$$\Leftrightarrow A_{halberSektor} = (50^2 \cdot \pi \cdot \frac{34{,}4°}{360°}) \text{ cm}^2 = 750{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{MPC} = 0{,}5 \cdot \sin 79{,}4° \cdot \overline{MP} \cdot \overline{PC}$$

$$\Leftrightarrow A_{MPC} = 0{,}5 \cdot \sin 79{,}4° \cdot 50 \cdot 40 \text{ cm}^2 = 982{,}9 \text{ cm}^2$$

$A_{halberFreiraum} = 982{,}9 \text{ cm}^2 - 750{,}5 \text{ cm}^2 = 232{,}4 \text{ cm}^2$

$A_{ganzerFreiraum} = 2 \cdot 232{,}4 \text{ cm}^2 = 464{,}8 \text{ cm}^2$

$A_{Quadrat} = (90 \text{ cm})^2 = 8100 \text{ cm}^2$

$A_{Dusche} = 8100 \text{ cm}^2 - 464{,}8 \text{ cm}^2 = 7635{,}2 \text{ cm}^2$

Aufgabe A2

2.1

Dreieck FNS:

$\tan \sphericalangle NFS = \frac{\overline{SN}}{\overline{FN}} \Leftrightarrow \overline{SN} = \tan \sphericalangle NFS \cdot \overline{FN} = \tan 48° \cdot 1{,}8 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$

Damit ist $\overline{OS} = \overline{ON} - \overline{SN} = 4 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$

und $\overline{MS} = \overline{MO} - \overline{OS} = 10 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

Dreieck AMS:

$\tan \sphericalangle MAS = \frac{\overline{SM}}{\overline{MA}} \Leftrightarrow \overline{MA} = \frac{\overline{SM}}{\tan \sphericalangle MAS} = \frac{8 \text{ cm}}{\tan 48°} = 7{,}2 \text{ cm}$

Damit ist der Durchmesser $2 \cdot 7{,}2 \text{ cm} = 14{,}4 \text{ cm}$

2.2

$V_{ABS} = \frac{1}{3} \cdot \overline{MA}^2 \cdot \pi \cdot \overline{SM} = \frac{1}{3} \cdot 7{,}2^2 \cdot \pi \cdot 8 \text{ cm}^3 = 434{,}29 \text{ cm}^3$

$V_{FCS} = \frac{1}{3} \cdot \overline{FN}^2 \cdot \pi \cdot \overline{SN} = \frac{1}{3} \cdot 1{,}8^2 \cdot \pi \cdot 2 \text{ cm}^3 = 6{,}79 \text{ cm}^3$

$V_{gefüllt} = 434{,}29 \text{ cm}^3 - 6{,}79 \text{ cm}^3 = 427{,}5 \text{ cm}^3$

2.3

$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot 1{,}7^3 \cdot \pi \text{ cm}^3 = 20{,}6 \text{ cm}^3$

$V_{FCDE} = \overline{FN}^2 \cdot \pi \cdot h_{neu}$

$\Leftrightarrow h_{neu} = \frac{V_{FCDE}}{\overline{FN}^2 \cdot \pi}$

$\Leftrightarrow h_{neu} = \frac{20{,}6}{1{,}8^2 \cdot \pi} \text{ cm} = 2{,}0 \text{ cm}$

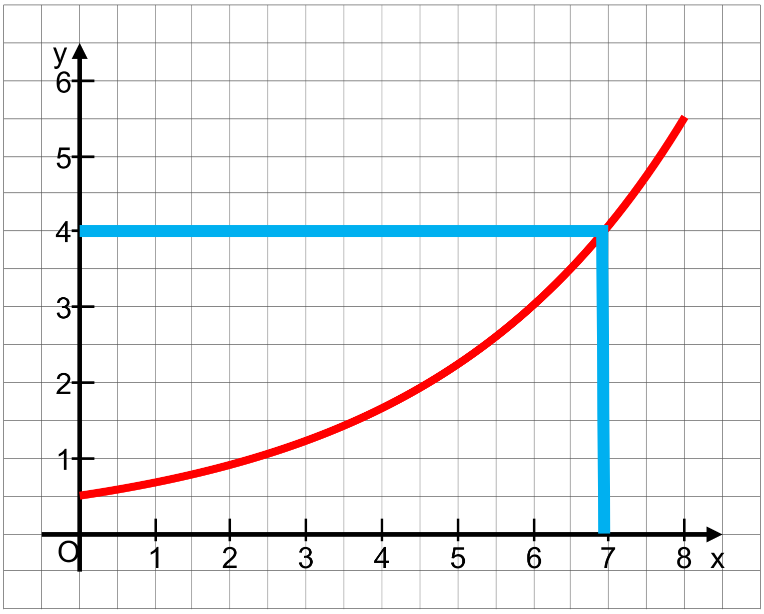
2.4

C fällt weg, da es keinen senkrechten Anstieg ohne Vergehen von Zeit geben kann.
A fällt weg, da der Anstieg in dem Kegelgefäß am Anfang nicht konstant sein kann.
Damit ist nur noch B übrig.

Aufgabe A3

3.1 f: $y = 0{,}5 \cdot 1{,}35^x$

x	0,00	2,00	4,00	6,00	8,00
y	0,50	0,91	1,66	3,03	5,52



3.2

20 % von 20 sind 4. Ablesen: ca. 6,9. A: Am 17. Juni.

[Rechnerisch nur Zweig I: $4 = 0{,}5 \cdot 1{,}35^x$

$\Leftrightarrow\ 8 = 1{,}35^x\ \Leftrightarrow\ x = \log_{1,35} 8 = 6{,}93 \quad \mathbb{L} = \{6{,}93\}$]

3.3

$1{,}35^2 = 1{,}8225 \Rightarrow 82{,}25$ % (Kreuzerl bei 82 %)

Aufgabe B1

B 1.1 und 1.2

p_1: $y = x^2 - 8x + 14$ $S_1(4 \mid -2)$ $S_2(6 \mid 7)$ $P(9 \mid 4{,}75)$

Scheitelform: $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ Also:

$4{,}75 = a(9 - 6)^2 + 7$

$\Leftrightarrow -2{,}25 = 9a$

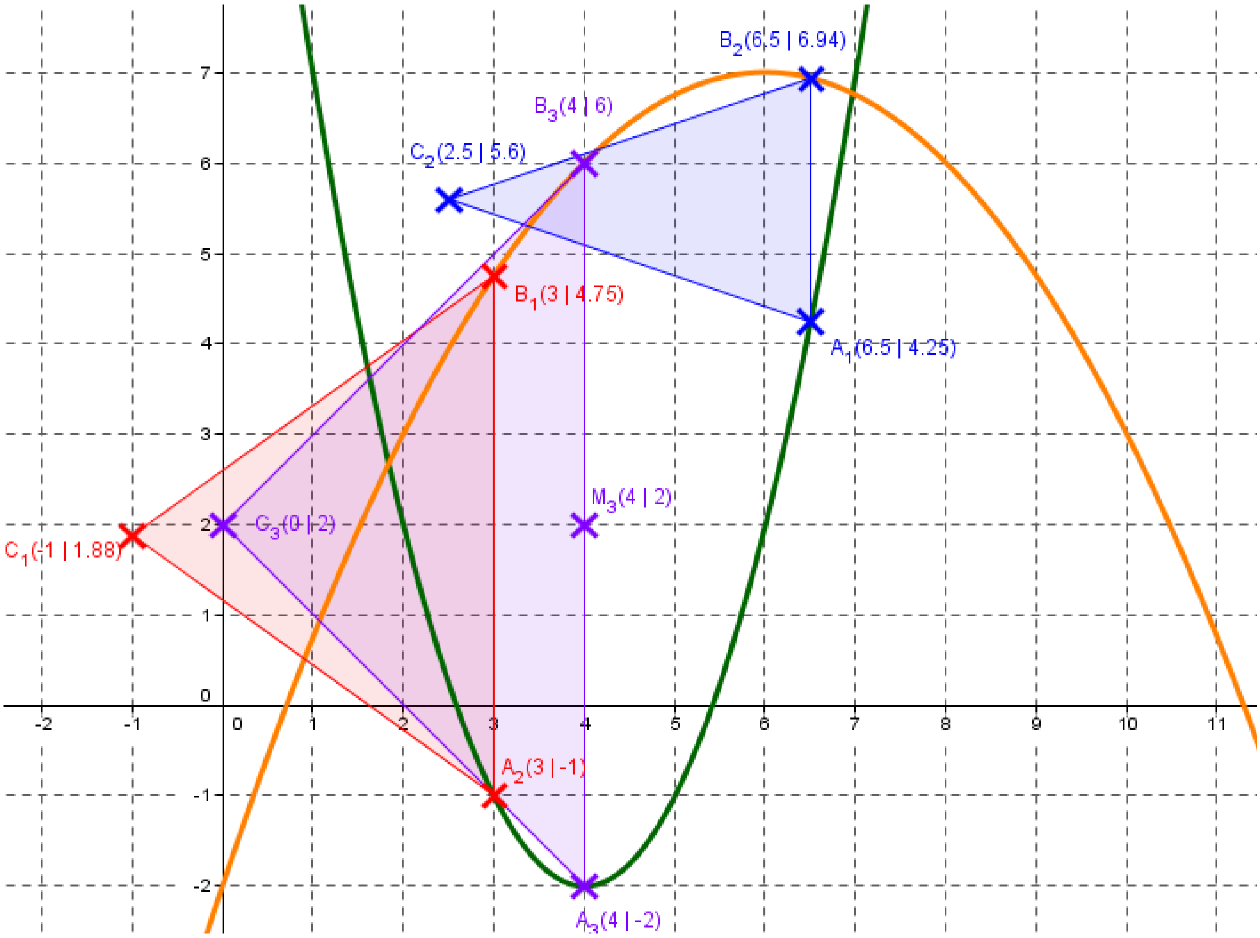
$\Leftrightarrow a = -0{,}25$

Damit ist **p_2: $y = -0{,}25(x - 6)^2 + 7$** bzw.

$y = -0{,}25(x^2 - 12x + 36) + 7$

$\Leftrightarrow$ **$y = -0{,}25x^2 + 3x - 2$**

x	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
y_2	-2,00	0,75	3,00	4,75	6,00	6,75	7,00	6,75	6,00	4,75	3,00



B 1.3

Die ganze Geschichte funktioniert nur zwischen den Schnittpunkten der beiden Funktionen:

$x^2 - 8x + 14 = -0{,}25x^2 + 3x - 2$

$\Leftrightarrow 1{,}25x^2 - 11x + 16 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1{,}25 \cdot 16}}{2 \cdot 1{,}25}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{41}}{2{,}5} \quad \Rightarrow x_1 = 6{,}96 \text{ und } x_2 = 1{,}84 \quad \mathbb{L} = \{1{,}84;\ 6{,}96\}$$

B 1.4

$$\overline{A_nB_n} = \sqrt{(x - x)^2 + (\mathbf{-0{,}25x^2 + 3x - 2} - (\mathbf{x^2 - 8x + 14}))^2}\ \text{LE}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_nB_n} = (-0{,}25x^2 + 3x - 2 - x^2 + 8x - 14)\ \text{LE}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_nB_n} = (-1{,}25x^2 + 11x - 16)\ \text{LE}$$

$$A(x) = 0{,}5 \cdot 4 \cdot (-1{,}25x^2 + 11x - 16)\ \text{FE}$$

$$\Leftrightarrow A(x) = (-2{,}5x^2 + 22x - 32)\ \text{FE}$$

$$A_{max} = -2{,}5(x^2 - 8{,}8x) - 32$$

$$\Leftrightarrow A_{max} = -2{,}5(x^2 - 8{,}8x + 4{,}4^2 - 4{,}4^2) - 32$$

$$\Leftrightarrow A_{max} = -2{,}5(x - 4{,}4)^2 + 16{,}4$$

Damit ist $A_{max} = 16{,}4$ FE für $x = 4{,}4$ und es gilt. Für C_0 gilt:
x-Wert: 4,4 – 4 laut Angabe
y-Wert: Mittelpunkt zwischen A_0 und B_0, also 4,4 in beide Parabelgleichungen einsetzen und den Mittelpunkt der berechneten y-Werte berechnen:

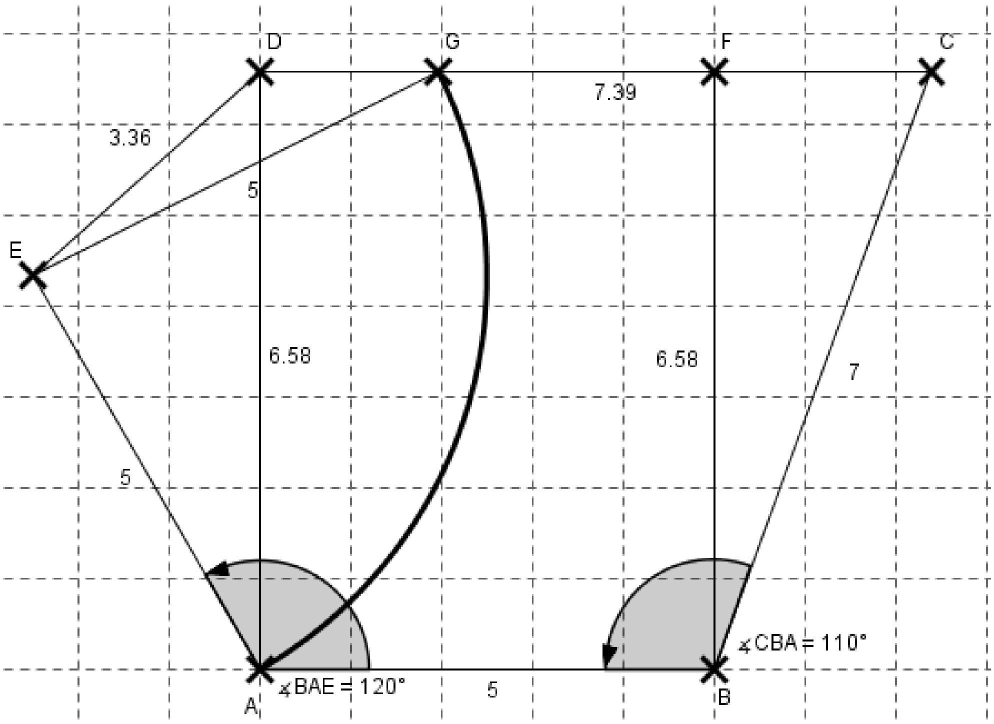
$$C_0\left(4{,}4 - 4 \mid \frac{-1{,}84 + 6{,}36}{2}\right) \Rightarrow C_0(0{,}4 \mid 2{,}26)$$

B 1.5 $\overline{A_nB_n}(4) = (-1{,}25 \cdot 4^2 + 11 \cdot 4 - 16)\ \text{LE} = 8\ \text{LE}$

Damit ist die halbe Länge 4 LE, was exakt der Höhe entspricht. Somit sind die beiden Teildreiecke $A_3M_3C_3$ und $M_3B_3C_3$ gleichschenklig mit einem 90°-Winkel bei M_3. Daher müssen die beiden übrigen Winkel jeweils das Maß 45° haben – und da nun bei C_3 zwei 45°-Winkel anliegen, ergibt sich ein rechter Winkel.

Aufgabe B2

B 2.1



B 2.2
Dreieck BCF:

$$\cos \sphericalangle CBF = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$$

$\Leftrightarrow \overline{BF} = \cos \sphericalangle CBF \cdot \overline{BC} = \cos 20° \cdot 7\ cm = 6{,}58\ cm$

B 2.3
Dreieck BCF:

$$\tan \sphericalangle CBF = \frac{\overline{FC}}{\overline{BF}}$$

$\Leftrightarrow \overline{FC} = \tan \sphericalangle CBF \cdot \overline{BF} = \tan 20° \cdot 6{,}58\ cm = 2{,}4\ cm$

$A_{ABFD} = \overline{AB} \cdot \overline{BF} = 5\ cm \cdot 6{,}58\ cm = 32{,}9\ cm^2$

$A_{BCF} = 0{,}5 \cdot \overline{FC} \cdot \overline{BF} = 0{,}5 \cdot 2{,}4\ cm \cdot 6{,}58\ cm = 7{,}896\ cm^2$

$A_{ADE} = 0{,}5 \cdot \sin \sphericalangle DAE \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AD}$

$\Leftrightarrow A_{ADE} = 0{,}5 \cdot \sin 30° \cdot 5\ cm \cdot 6{,}58\ cm = 8{,}225\ cm^3$

$A_{alles} = 32{,}9\ cm^2 + 7{,}896\ cm^2 + 8{,}225\ cm^2 = 49{,}021\ cm^3 \approx 49\ cm^2$

B 2.4
Kosinus-Satz im Dreieck ADE:

$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \cos \sphericalangle DAE$

$\Leftrightarrow \overline{DE}^2 = (6{,}58^2 + 5^2 - 2 \cdot 6{,}58 \cdot 5 \cdot \cos 30°)\ cm^2$

$\Leftrightarrow \overline{DE}^2 = 11{,}31\ cm^2$

$\Leftrightarrow \overline{DE} = 3{,}36\ cm$

Sinus-Satz im Dreieck ADE:

$$\frac{\sin \sphericalangle EDA}{\overline{AE}} = \frac{\sin \sphericalangle DAE}{\overline{ED}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle EDA = \frac{\sin \sphericalangle DAE \cdot \overline{AE}}{\overline{ED}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle EDA = \frac{\sin 30° \cdot 5\ cm}{3{,}36\ cm} = 0{,}74$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle EDA = 48{,}08°$

B 2.5

Dreieck ADE:

$\sphericalangle AED = 180° - 30° - 48{,}08° = 101{,}92°$

Sinus-Satz im Dreieck EGD:

$$\frac{\sin \sphericalangle DGE}{\overline{ED}} = \frac{\sin (\sphericalangle EDA + 90°)}{\overline{EG}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle DGE = \frac{\sin 138{,}08° \cdot \overline{ED}}{\overline{EG}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle DGE = \frac{\sin 138{,}08° \cdot 3{,}36 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0{,}45$$

$\Leftrightarrow \sphericalangle DGE = 26{,}68°$

Dreieck EGD:

$\sphericalangle GED = 180° - 138{,}08° - 26{,}68° = 15{,}24°$

Endlich: $\sphericalangle AEG = \sphericalangle AED - \sphericalangle GED = 101{,}92° - 15{,}24° = 86{,}68°$

B 2.6

$$A_{EGD} = 0{,}5 \cdot \sin \sphericalangle GED \cdot \overline{DE} \cdot \overline{EG}$$

$$\Leftrightarrow A_{EGD} = 0{,}5 \cdot \sin 15{,}24° \cdot 3{,}36 \cdot 5 \text{ cm}^2 = 2{,}21 \text{ cm}^2$$

$$A_{Sektor} = \overline{EG}^2 \cdot \pi \cdot \frac{86{,}68°}{360°} \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow A_{Sektor} = 5^2 \cdot \pi \cdot \frac{86{,}68°}{360°} \text{ cm}^2 = 18{,}91 \text{ cm}^2$$

$A_{zusammen} = 2{,}21 \text{ cm}^2 + 18{,}91 \text{ cm}^2 = 21{,}12 \text{ cm}^2$

$$\frac{21{,}12 \text{ cm}^2 \cdot 100 \%}{49 \text{ cm}^2} = 43{,}10 \%$$