Abschlussprüfung 2008
an den Realschulen in Bayern
Mathematik II Haupttermin
Lösungsvorschlag von StR(RS) Karsten Reibold – Stand: 09.06.2017

Aufgabe P1

1.1

Dreieck BSK:

$$\tan \sphericalangle SBK = \frac{\overline{KS}}{\overline{KB}}$$

$\Leftrightarrow \overline{KS} = \tan \sphericalangle SBK \cdot \overline{KB} = \tan 40° \cdot 2\text{ mm} = 1{,}7\text{ mm}$

Dreieck ASG:

$$\tan \sphericalangle SBK = \frac{\overline{GS}}{\overline{GA}}$$

$\Leftrightarrow \overline{GS} = \tan \sphericalangle SBK \cdot \overline{GA} = \tan 40° \cdot 3{,}5\text{ mm} = 2{,}9\text{ mm}$

Damit ist $\overline{GK} = \overline{GS} - \overline{KS} = 2{,}9\text{ mm} - 1{,}7\text{ mm} = 1{,}2\text{ mm}$

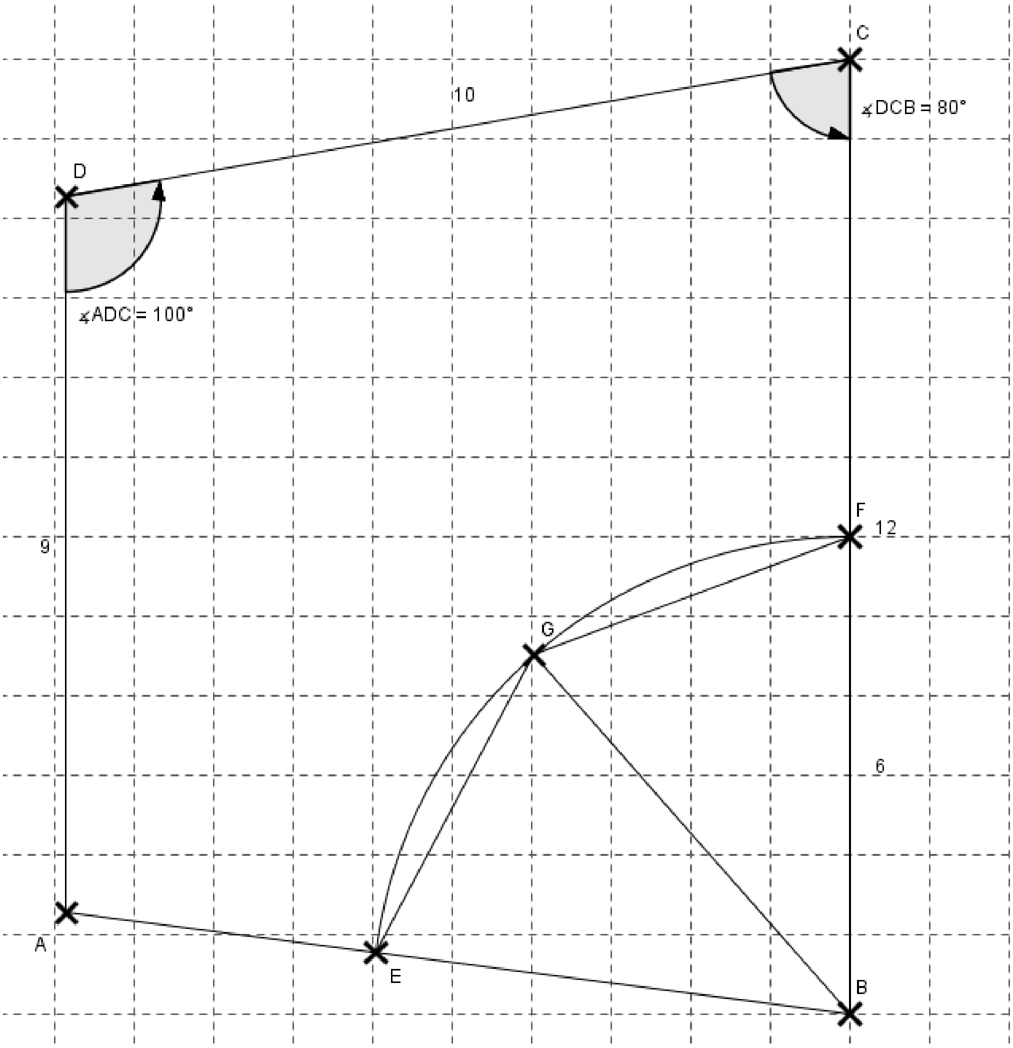
und $\overline{KH} = \overline{GH} - \overline{GK} = 10\text{ mm} - 1{,}2\text{ mm} = 8{,}8\text{ mm}$

$V = V_{Zylinder} + V_{ganzerKegel} - V_{doppelterKegelBSE}$

$\Leftrightarrow V = \overline{KB}^2 \cdot \pi \cdot \overline{KH} + \frac{1}{3} \cdot \overline{GA}^2 \cdot \pi \cdot \overline{GS} - \frac{1}{3} \cdot \overline{KB}^2 \cdot \pi \cdot \overline{KS}$

$\Leftrightarrow V = (2^2 \cdot \pi \cdot 8{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 3{,}5^2 \cdot \pi \cdot 2{,}9 - \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 1{,}7)\text{ mm}^3 = 140{,}7\text{ mm}^3$

Aufgabe P2
2.1



2.2
Kosinus-Satz im Dreieck ACD:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DC} \cdot \cos \sphericalangle ADC$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 100°)\ m^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 212{,}26\ m^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 14{,}57\ m$$

Sinus-Satz im Dreieck ACD:

$$\frac{\sin \sphericalangle DCA}{\overline{AD}} = \frac{\sin \sphericalangle ADC}{\overline{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle DCA = \frac{\sin \sphericalangle ADC \cdot \overline{AD}}{\overline{AC}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle DCA = \frac{\sin 100° \cdot 9\ m}{14{,}57\ m} = 0{,}61$$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle DCA = 37{,}47°$$

Damit ist $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCB - \sphericalangle DCA = 80° - 37{,}47° = 42{,}53°$

Kosinus-Satz im Dreieck ABC:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DC} \cdot \cos \sphericalangle ACB$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = (14{,}57^2 + 12^2 - 2 \cdot 14{,}57 \cdot 12 \cdot \cos 42{,}53°)\ m^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 98{,}60\ m^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 9{,}93\ m$$

Sinus-Satz im Dreieck ABC:

$$\frac{\sin \sphericalangle CBA}{\overline{AC}} = \frac{\sin \sphericalangle ACB}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle CBA = \frac{\sin \sphericalangle ACB \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \sphericalangle CBA = \frac{\sin 42{,}53° \cdot 14{,}57\ m}{9{,}93\ m} = 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle CBA = 82{,}68° \quad [\text{im Folgenden: } \sphericalangle CBA = 82{,}69°]$$

$$A_{Sektor} = (6^2 \cdot \pi \cdot \frac{82{,}69°}{360°})\ m^2 = 25{,}98\ m^2$$

2.3

Kosinus-Satz im Dreieck EBG:

$$\overline{EG}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BG}^2 - 2 \cdot \overline{EB} \cdot \overline{BG} \cdot \cos 0{,}5 \cdot \sphericalangle CBA$$

$$\Leftrightarrow \overline{EG}^2 = (6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 41{,}345°)\ m^2$$

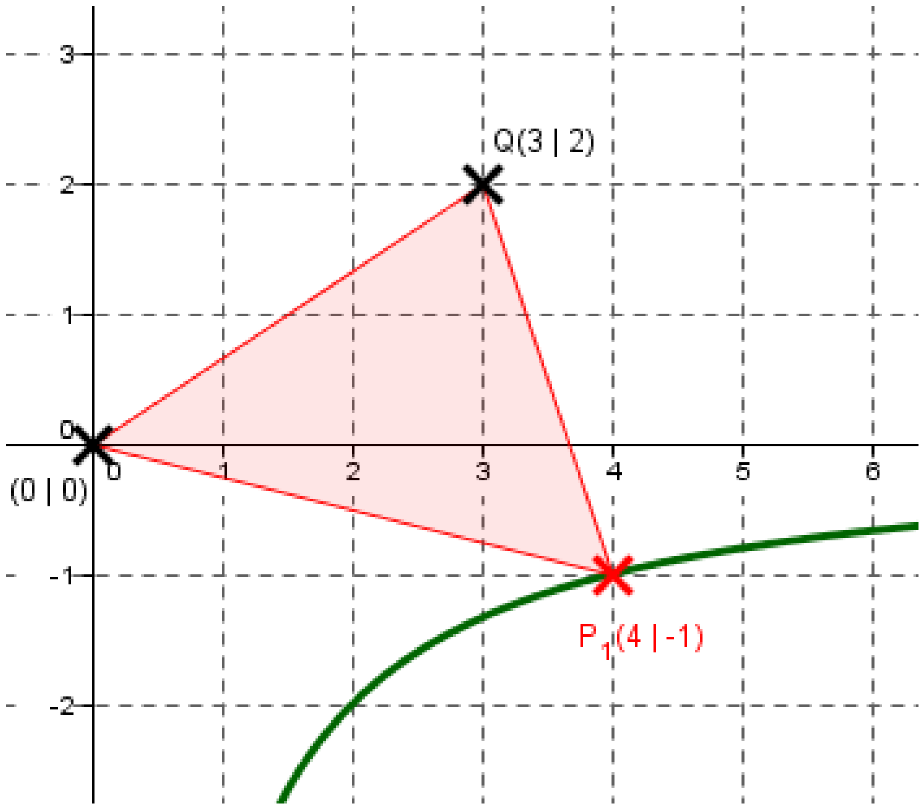
$$\Leftrightarrow \overline{EG}^2 = 17{,}95\ m^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{EG} = 4{,}24\ m$$

Aufgabe P3

3.1 **f: $y = -\frac{4}{x}$**

x	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00
y	-4,00	-2,00	-1,33	-1,00	-0,80	-0,67	-0,57	-0,50



3.2

$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OP_n} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{4}{x} \end{pmatrix}$

$$A(x) = 0,5 \begin{vmatrix} x & 3 \\ -\frac{4}{x} & 2 \end{vmatrix} \text{ FE}$$

$$\Leftrightarrow A(x) = 0,5\ (2x + \frac{12}{x})\text{ FE}$$

$$\Leftrightarrow A(x) = (x + \frac{6}{x})\text{ FE}$$

Aufgabe A1

A 1.1 und A 1.2 A(-2 | 3) C(6 | 3)

I $3 = 0{,}5 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$

II $3 = 0{,}5 \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c$

$\Leftrightarrow$ I $c = 1 + 2b$

II $c = -15 - 6b$

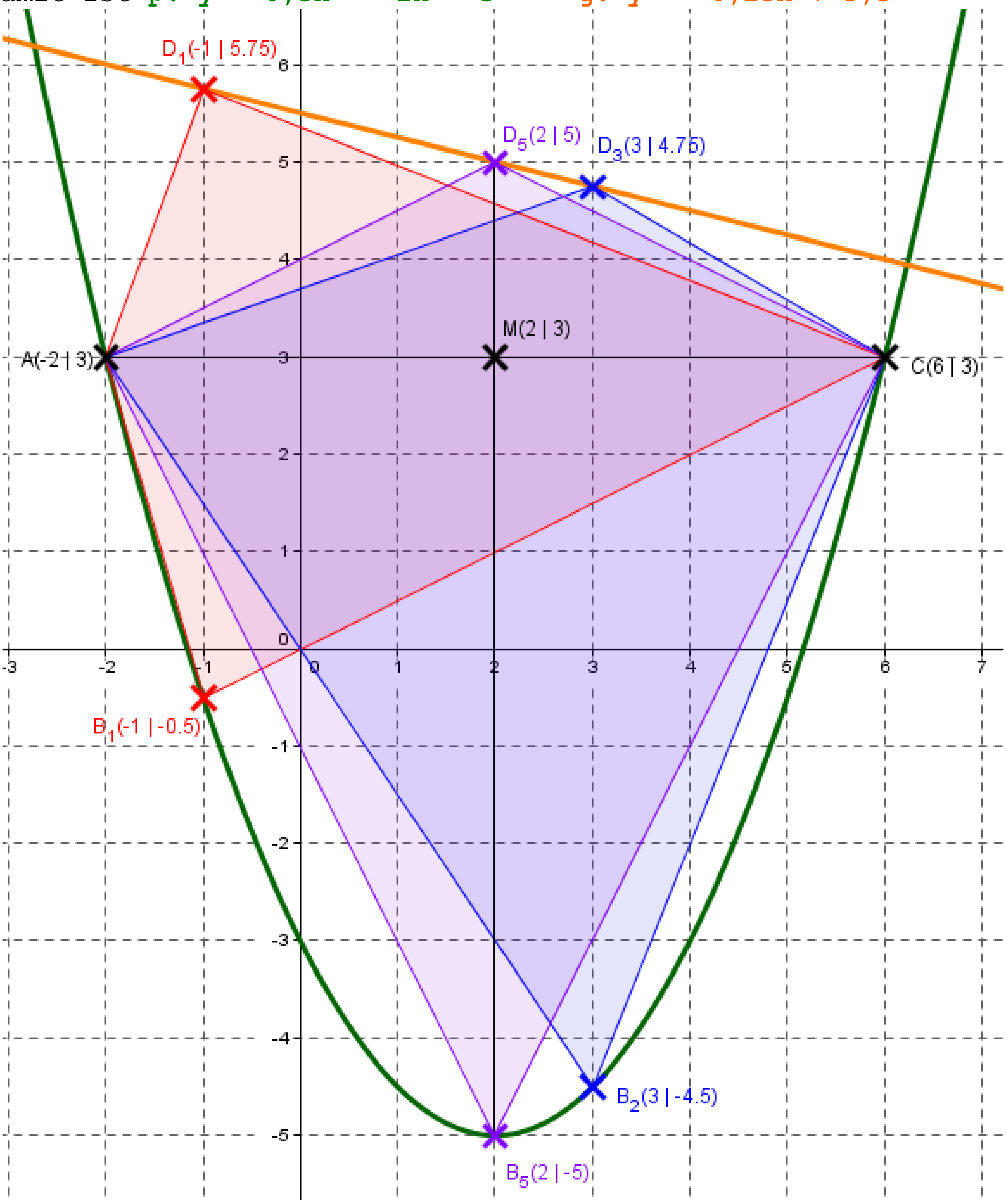
I = II $1 + 2b = -15 - 6b$

$\Leftrightarrow$ $8b = -16$

$\Leftrightarrow$ $b = -2$ in I

I $c = 1 + 2 \cdot (-2) = -3$

Damit ist **p: $y = 0{,}5x^2 - 2x - 3$** **g: $y = -0{,}25x + 5{,}5$**



A 1.3

$$\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} x - (-2) \\ 0{,}5x^2 - 2x - 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ 0{,}5x^2 - 2x - 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 - (-2) \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} x - (-2) \\ -0{,}25x + 5{,}5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -0{,}25x + 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$A(x) = A_{AB_nC} + A_{ACD_n}$$

$$\Leftrightarrow \quad A(x) = 0{,}5 \begin{vmatrix} x + 2 & 8 \\ 0{,}5x^2 - 2x - 6 & 0 \end{vmatrix} \text{ FE} + 0{,}5 \begin{vmatrix} 8 & x + 2 \\ 0 & -0{,}25x + 2{,}5 \end{vmatrix} \text{ FE}$$

$$\Leftrightarrow \quad A(x) = [0{,}5(-4x^2 + 16x + 48) + 0{,}5(-2x + 20)] \text{ FE} \quad *$$

$$\Leftrightarrow \quad A(x) = (-2x^2 + 8x + 24 - x + 10) \text{ FE}$$

$$\Leftrightarrow \quad A(x) = (-2x^2 + 7x + 34) \text{ FE}$$

A 1.4

$$38{,}5 = -2x^2 + 7x + 34$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x^2 + 7x - 4{,}5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4{,}5)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{13}}{-4} \quad \Rightarrow x_1 = 0{,}85 \text{ und } x_2 = 2{,}65 \quad \mathbb{L} = \{0{,}85;\ 2{,}65\}$$

A 1.5

Das DreieckAB_nC und das DreieckACD_n müssen den gleichen Flächeninhalt haben, damit ein symmetrisches Drachenviereck entstehen kann. Also:

$$0{,}5(-4x^2 + 16x + 48) = 0{,}5(-2x + 20) \qquad \text{aus } *$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x^2 + 8x + 24 = -x + 10$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x^2 + 9x + 14 = 0$$

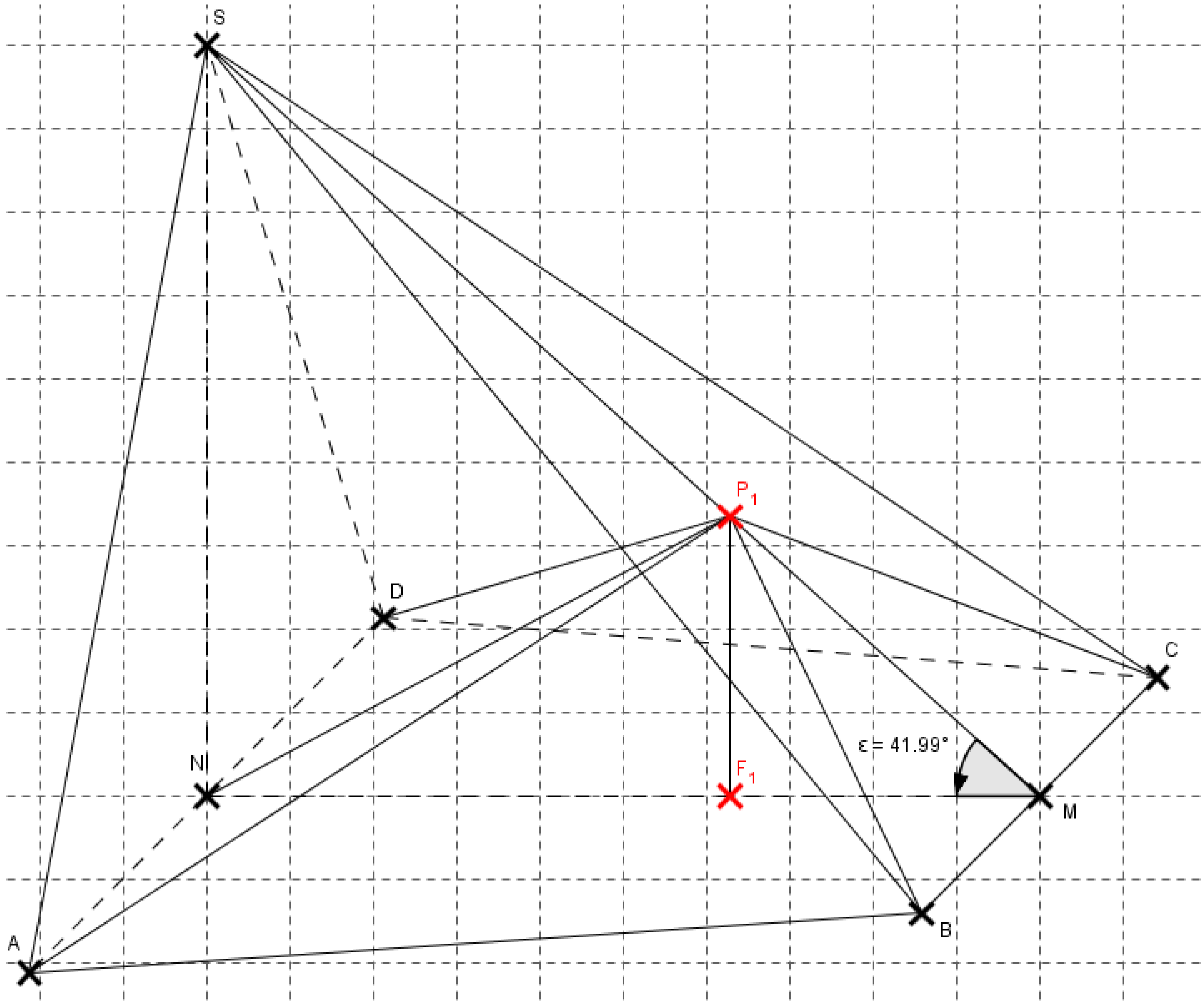
$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 14}}{2 \cdot (-2)}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{193}}{-4} \quad \Rightarrow x_1 = -1{,}22 \text{ und } x_2 = 5{,}72 \quad \mathbb{L} = \{-1{,}22;\ 5{,}72\}$$

A 1.6

Jetzt ist $[B_3C_3]$ die Symmetrieachse, die durch den Mittelpunkt M der Strecke [AC] geht.

Aufgabe A2
A 2.1



$$\tan \varepsilon = \frac{\overline{SN}}{\overline{MN}} = \frac{9}{10} = 0{,}9 \Leftrightarrow \varepsilon = 41{,}99°$$

A 2.2

$$\overline{MS} = \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{SN}^2}\ \text{cm} = \sqrt{10^2 + 9^2}\ \text{cm} = \sqrt{181}\ \text{cm} = 13{,}45\ \text{cm}$$

Damit gilt: $0 < x \leqq 13{,}45$

A 2.3 Die Form der Lösung lässt darauf schließen, dass ganz am Ende der Kosinus-Satz oder Pythagoras angewendet werden muss. Bis man dort ist, muss man sich erstmal alle nötigen Teilstrecken besorgen. Knackpunkt ist hier die Höhe $\overline{F_nP_n}(x)$ – wenn man diese hat, dann sind die restlichen Teilstrecken kein Problem mehr.

Dreieck F_nMP_n:

$$\sin \varepsilon = \frac{\overline{F_nP_n}(x)}{x}$$

$$\Leftrightarrow \overline{F_nP_n}(x) = \sin \varepsilon \cdot x\ \text{cm}$$

$\Leftrightarrow \overline{F_nP_n}(x) = \sin 41{,}99° \cdot x = 0{,}67x$

$\tan \varepsilon = \dfrac{\overline{F_nP_n}(x)}{\overline{F_nM}(x)}$

$\Leftrightarrow \overline{F_nM}(x) = \dfrac{\overline{F_nP_n}(x)}{\tan \varepsilon}$ cm

$\Leftrightarrow \overline{F_nM}(x) = \dfrac{\sin \varepsilon \cdot x}{\tan \varepsilon}$ cm

$\Leftrightarrow \overline{F_nM}(x) = \dfrac{\sin \varepsilon \cdot x}{\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon}}$ cm $\quad (\tan \varepsilon = \dfrac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon})$

$\Leftrightarrow \overline{F_nM}(x) = \cos \varepsilon \cdot x$ cm

$\Leftrightarrow \overline{F_nM}(x) = 0{,}74x$

Dreieck NMP_N:

$\overline{NF_n}(x) = (\overline{NM} - \overline{F_nM}(x))$ cm $= (10 - 0{,}74x)$ cm

$\Leftrightarrow \overline{NP_n}(x) = \sqrt{\overline{NF_n}(x)^2 + \overline{F_nP_n}(x)^2}$ cm

$\Leftrightarrow \overline{NP_n}(x) = \sqrt{(10 - \cos 41{,}99° \cdot x)^2 + (\sin 41{,}99° \cdot x)^2}$ cm

$\Leftrightarrow \overline{NP_n}(x) = \sqrt{100 - 14{,}87x + 0{,}55x^2 + 0{,}45x^2}$ cm

$\Leftrightarrow \overline{NP_n}(x) = \sqrt{x^2 - 14{,}87x + 100}$ cm

$A_{BCPn} = 0{,}5 \cdot \overline{BC} \cdot x$ FE $= 0{,}5 \cdot 8 \cdot x$ FE $= 4 \cdot x$ FE

$A_{BPnD} = 0{,}5 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{NP_n}(x)$ FE

$\Leftrightarrow A_{BPnD} = 0{,}5 \cdot 12 \cdot \sqrt{x^2 - 14{,}87x + 100}$ FE

$\Leftrightarrow A_{BPnD} = 6 \cdot \sqrt{x^2 - 14{,}87x + 100}$ FE

$\Leftrightarrow A_{BPnD} = \sqrt{36x^2 - 535{,}32x + 3600}$ FE

Gleichsetzen:

$4x = \sqrt{36x^2 - 535{,}32x + 3600}$

$\Leftrightarrow 16x^2 = 36x^2 - 535{,}32x + 3600$

$\Leftrightarrow 20x^2 - 535{,}32x + 3600 = 0$

$D = (-535{,}32)^2 - 4 \cdot 20 \cdot 3600 = -1432{,}50 < 0$ keine Lösung

A 2.4 Aus A 2.3: $\overline{F_nP_n}(x) = \sin 41{,}99° \cdot x$ cm $= 0{,}67 \cdot x$ cm

$V(x) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot (\overline{BC} + \overline{AD}) \cdot \overline{NM} \cdot \overline{F_nP_n}(x)$ cm³

$\Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot (8 + 12) \cdot 10 \cdot 0{,}67 \cdot x$ cm³

$\Leftrightarrow V(x) = 22{,}33x$ cm³

A 2.5

Dreieck NF_nP_n:

$$\tan 60° = \frac{\overline{F_2P_2}(x)}{\overline{NF_2}(x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\sin 41{,}99° \cdot x}{10 - \cos 41{,}99° \cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot (10 - \cos 41{,}99° \cdot x) = \sin 41{,}99° \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot 10 - \sqrt{3} \cdot \cos 41{,}99° \cdot x - \sin 41{,}99° \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-\sqrt{3} \cdot \cos 41{,}99° - \sin 41{,}99°) = -\sqrt{3} \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{3} \cdot 10}{-\sqrt{3} \cdot \cos 41{,}99° - \sin 41{,}99°} = 8{,}85$$

Damit gilt: $\overline{F_nP_n}(8{,}85) = \sin 41{,}99° \cdot 8{,}85 \text{ cm} = 5{,}92 \text{ cm}$

$$A_{alles} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot (\overline{BC} + \overline{AD}) \cdot \overline{NM} \cdot \overline{SN} \text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow A_{alles} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot (8 + 12) \cdot 10 \cdot 9 \text{ cm}^3 = 300 \text{ cm}^3$$

$$A_{ABCDP2} = 22{,}33 \cdot 8{,}85 \text{ cm}^3 = 197{,}62 \text{ cm}^2$$

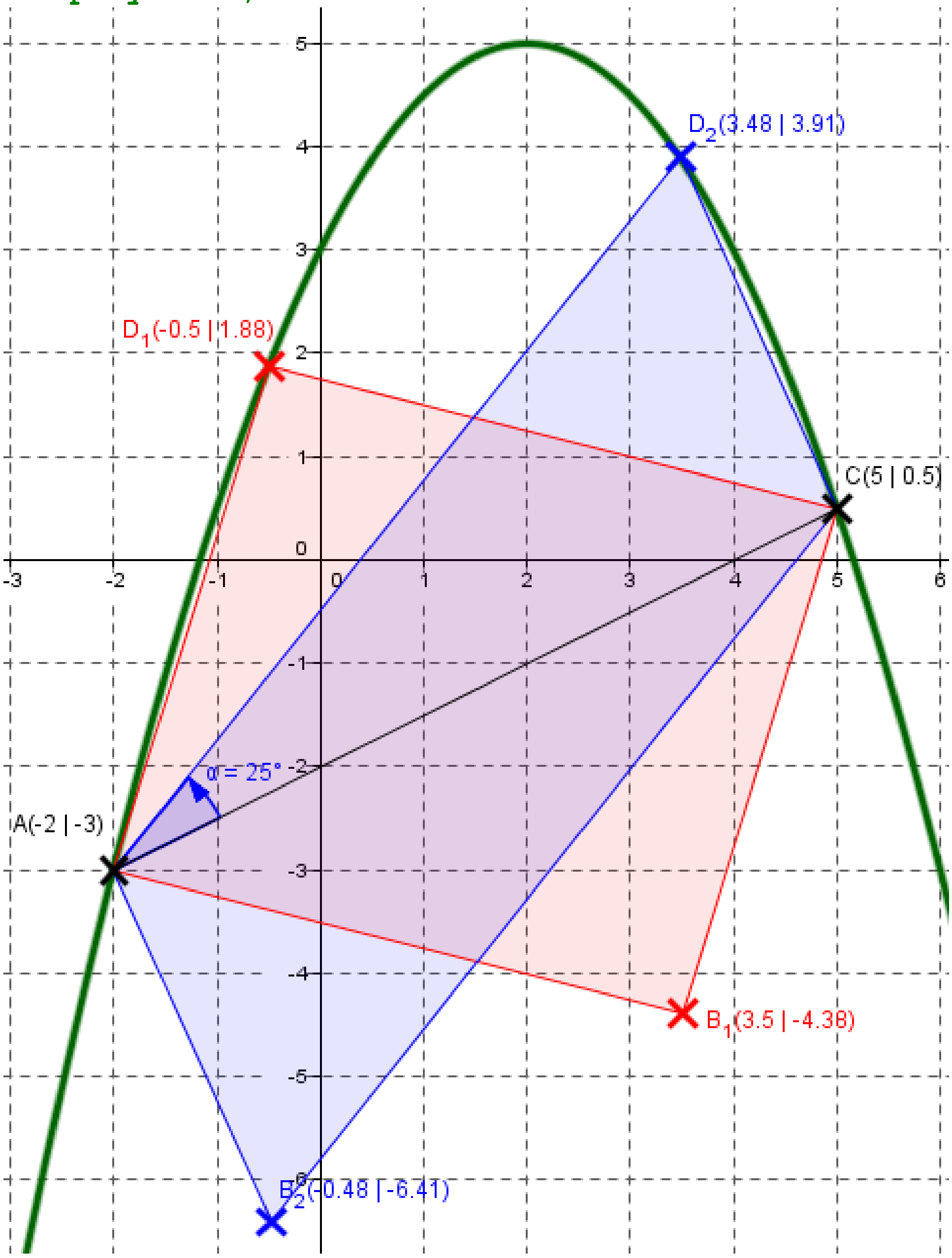
$197{,}62 : 300 = 0{,}6587 \Rightarrow 65{,}87\ \%$

Aufgabe B1

B 1.1 und B 1.2 A(-2 |-3) C(5 | 0,5)

$$\text{I} \quad -3 = a\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2) + c$$
$$\text{II} \quad 0,5 = a\cdot 5^2 + 2\cdot 5 + c$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{I} \quad c = -4a + 1$$
$$\text{II} \quad c = -9,5 - 25a$$
$$\text{I} = \text{II} \quad -4a + 1 = -9,5 - 25a$$
$$\Leftrightarrow \quad 21a = -10,5$$
$$\Leftrightarrow \quad a = -0,5 \quad \text{in I}$$
$$\text{I} \quad c = -4\cdot(-0,5) + 1 = 3$$

Damit ist **p: $y = -0,5x^2 + 2x + 3$**



$$m_{AD1} = \frac{4,875}{1,5} = 3,25 \qquad m_{CD1} = \frac{-5,5}{1,375} = -0,25$$

$3,25 \cdot (-0,25) = -0,8125 \neq -1$ Also stehen sie nicht senkrecht aufeinander und es ist daher kein Rechteck.

B 1.3

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 - (-2) \\ 0,5 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} x - (-2) \\ -0,5x^2 + 2x + 3 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -0,5x^2 + 2x + 6 \end{pmatrix}$$

$$A(x) = 2 \cdot A_{ACDn}$$

$$\Leftrightarrow \quad A(x) = 2 \cdot 0,5 \begin{vmatrix} 7 & x + 2 \\ 3,5 & -0,5x^2 + 2x + 6 \end{vmatrix} \text{ FE}$$

$$\Leftrightarrow \quad A(x) = (-3,5x^2 + 14x + 42 - 3,5x - 7) \text{ FE}$$

$$\Leftrightarrow \quad A(x) = (-3,5x^2 + 10,5x + 35) \text{ FE}$$

B 1.4

$$A_{max} = -3,5(x^2 - 3x) + 35$$

$$\Leftrightarrow \quad A_{max} = -3,5(x^2 - 3x + 1,5^2 - 1,5^2) + 35$$

$$\Leftrightarrow \quad A_{max} = -3,5(x - 1,5)^2 + 42,875$$

Damit ist $A_{max} = 42,875$ FE für $x = 1,5$.

Also ist $D_0(1,5 \mid 4,875)$

B 1.5

Gesucht ist der Schnittpunkt einer Geraden g durch A und D_2 mit der Parabel p.

$m_{AC} = \frac{3,5}{7} = 0,5 \quad \tan \vartheta = 0,5 \Leftrightarrow \vartheta = 26,57°$

$\tan (25° + 26,57°) = 1,26$

Punkt-Steigungsform:

$$y = 1,26(x + 2) - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 1,26x - 0,48$$

Also:

$$1,26x - 0,48 = \mathbf{-0,5x^2 + 2x + 3}$$

$$\Leftrightarrow \quad -0,5x^2 + 0,74x + 3,48 = 0$$

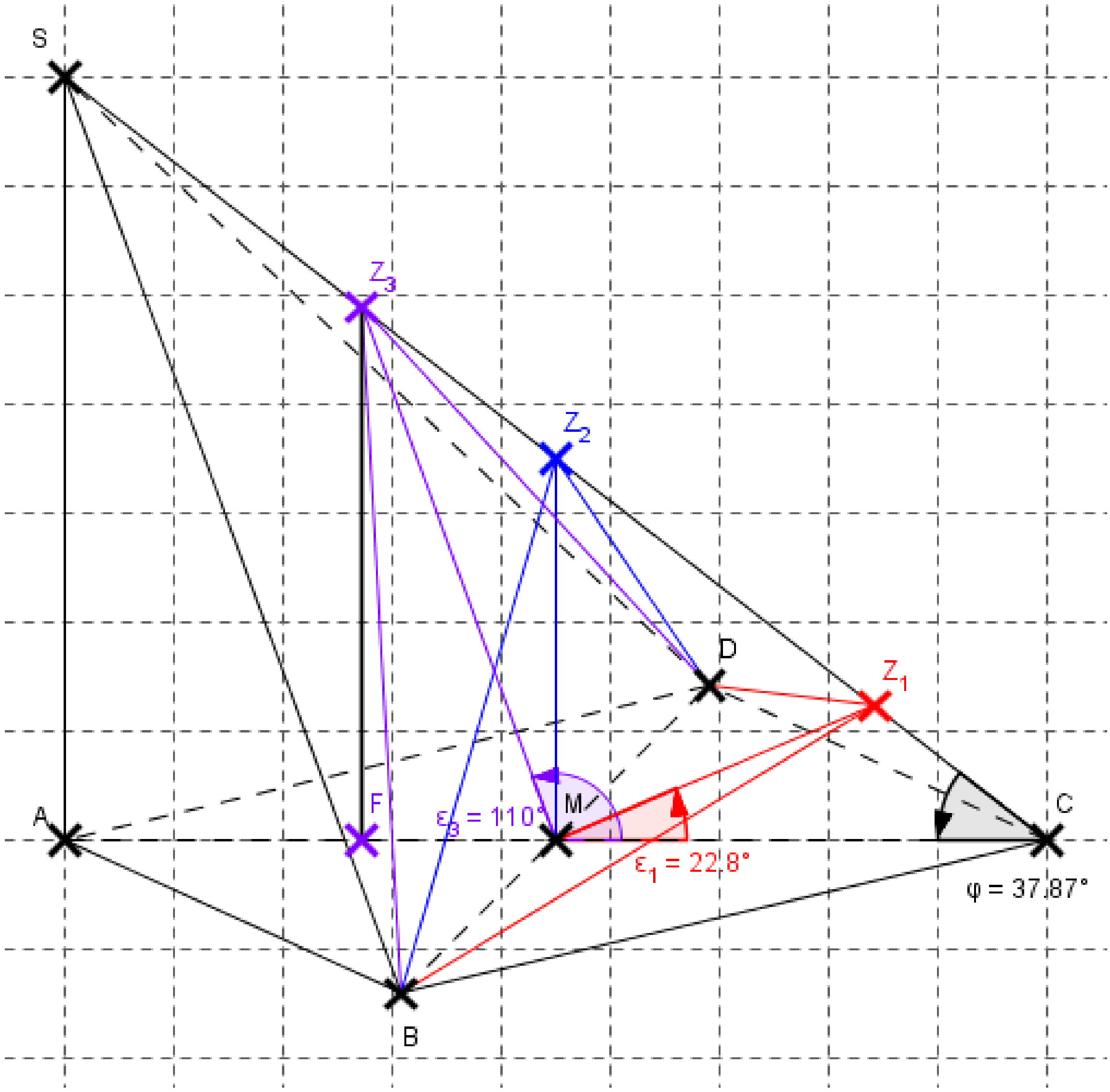
$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0,74 \pm \sqrt{0,74^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot 3,48}}{2 \cdot (-0,5)}$$

$$= \frac{-0,74 \pm \sqrt{7,5076}}{-1} \quad \Rightarrow x_1 = 3,48 \text{ (und } x_2 = -2) \quad \mathbb{L} = \{3,48\}$$

Nicht verlangt: Damit ist **$D_2(3,48 \mid 3,90)$**.

Aufgabe B2

B 2.1



Dreieck ACS:

$$\overline{SC} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AS}^2}\ \text{cm} = \sqrt{9^2 + 7^2}\ \text{cm} = \sqrt{130}\ \text{cm} = 11{,}40\ \text{cm}$$

$$\tan\varphi = \frac{\overline{AS}}{\overline{AC}} = \frac{7}{9} = 0{,}78 \Leftrightarrow \varphi = 37{,}87°$$

B 2.2

Kosinus-Satz im Dreieck MCZ_1:

$$\overline{MZ_1}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{CZ_1}^2 - 2\cdot\overline{MC}\cdot\overline{CZ_1}\cdot\cos\varphi$$

$$\Leftrightarrow \overline{MZ_1}^2 = (4{,}5^2 + 2^2 - 2\cdot 4{,}5\cdot 2\cdot\cos 37{,}87°)\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MZ_1}^2 = 10{,}04\ \text{cm}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MZ_1} = 3{,}17\ \text{cm}$$

Sinus-Satz im Dreieck MCZ_1:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\overline{CZ_1}} = \frac{\sin \varphi}{\overline{MZ_1}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \varepsilon = \frac{\sin \varphi \cdot \overline{CZ_1}}{\overline{MZ_1}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \varepsilon = \frac{\sin 37{,}87° \cdot 2 \text{ cm}}{3{,}17 \text{ cm}} = 0{,}39$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = 22{,}79°$$

B 2.3
Da M der Mittelpunkt von [AC] ist, muss Z_2 nach dem Vierstreckensatz auch der Mittelpunkt von [SC] sein.

B 2.4
Sinus-Satz im Dreieck MCZ_3:

$$\frac{\overline{Z_3C}}{\sin 110°} = \frac{\overline{MC}}{\sin (180° - 110° - 37{,}87°)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{Z_3C} = \frac{\overline{MC} \cdot \sin 110°}{\sin (180° - 110° - 37{,}87°)} \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow \overline{Z_3C} = \frac{4{,}5 \cdot \sin 110°}{\sin 32{,}13°} \text{ cm} = 7{,}95 \text{ cm}$$

B 2.5
Dreieck FCZ_3:

$$\sin 37{,}87° = \frac{\overline{FZ_3}}{\overline{Z_3C}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{FZ_3} = \sin 37{,}87° \cdot \overline{Z_3C} \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow \overline{FZ_3} = \sin 37{,}87° \cdot 7{,}95 \text{ cm} = 4{,}88 \text{ cm}$$

$$A_{alles} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AS} \text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow A_{alles} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 7 \text{ cm}^3 = 84 \text{ cm}^3$$

$$A_{BCDZ3} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{FZ_3} \text{ cm}^3$$

$$\Leftrightarrow A_{BCDZ3} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot 8 \cdot 4{,}5 \cdot 4{,}88 \text{ cm}^3 = 29{,}28 \text{ cm}^3$$

$29{,}28 : 84 = 0{,}3486 \Rightarrow 34{,}86\ \%$