

Mathematik II

Aufgabengruppe A

Aufgabe A 1

A 1.0 Die Gerade g hat die Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 1$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Punkte $P(0|-1)$ und $Q(5,5|1,75)$ sind die Schnittpunkte der Geraden g mit einer nach unten geöffneten Normalparabel p .

A 1.1 Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Parabel p sowie die Koordinaten des Scheitelpunktes S .

Zeichnen Sie sodann die Parabel p und die Gerade g in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-6 \leq x \leq 7$; $-3 \leq y \leq 11$

[Teilergebnis: $p: y = -x^2 + 6x - 1$]

5 P

A 1.2 Punkte $A_n \left(x \mid \frac{1}{2}x - 1 \right)$ auf der Geraden g und Punkte $B_n \left(x \mid -x^2 + 6x - 1 \right)$ auf der Parabel p mit $0 < x < 5,5$ ($x \in \mathbb{R}$) haben jeweils dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n B_n C_n$. Die Winkel $C_n B_n A_n$ besitzen stets das Maß $\beta = 120^\circ$ und für die Seiten $[B_n C_n]$ gilt: $\overline{B_n C_n} = 6 \text{ LE}$.

Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ für $x = 0,5$ und $A_2 B_2 C_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

2 P

A 1.3 Zeigen Sie durch Rechnung, dass für alle Vektoren $\overrightarrow{B_n C_n}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet gilt: $\overrightarrow{B_n C_n} = \begin{pmatrix} -5,20 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie sodann die Koordinaten des Punktes C_3 des Dreiecks $A_3 B_3 C_3$ für $x = 1,5$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

3 P

A 1.4 Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n B_n C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n . Überprüfen Sie sodann, ob es unter den Dreiecken $A_n B_n C_n$ ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE gibt.

[Teilergebnis: $A(x) = 2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x)$ FE]

4 P

A 1.5 Unter den Dreiecken $A_n B_n C_n$ gibt es die Dreiecke $A_4 B_4 C_4$ und $A_5 B_5 C_5$, in denen die Winkel $A_4 C_4 B_4$ und $A_5 C_5 B_5$ jeweils das Maß $\gamma = 25^\circ$ haben.

Berechnen Sie die Länge der Seiten $[A_4 B_4]$ bzw. $[A_5 B_5]$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

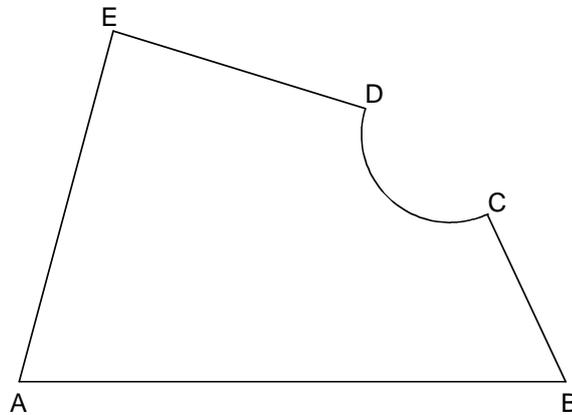
2 P

Mathematik II

Aufgabengruppe A

Aufgabe A 2

A 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt den Plan eines neu vermessenen Parkgrundstücks ABCDE. Das Parkgrundstück wird durch die Strecken [CB], [BA], [AE] und [ED] sowie den Kreisbogen DC begrenzt. Der Mittelpunkt M des Kreisbogens DC ist der Schnittpunkt der Geraden BC und ED.



Folgende Maße wurden vom Vermessungsteam ermittelt:

$$\overline{AB} = 120,00 \text{ m}; \overline{AE} = 80,00 \text{ m}; \overline{MB} = 60,00 \text{ m}; \overline{ED} = 58,00 \text{ m};$$
$$\sphericalangle BAE = 75,00^\circ; \sphericalangle MBA = 65,00^\circ.$$

Hinweis für Berechnungen:

Runden Sie jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma: Winkelmaße in $^\circ$, Längen in m und Flächeninhalte in m^2 .

- A 2.1 Zeichnen Sie das Parkgrundstück ABCDE im Maßstab 1 : 1000. 2 P
- A 2.2 Berechnen Sie die Länge der Strecke [EB] sowie das Maß des Winkels EBA.
[Ergebnisse: $\overline{EB} = 125,82 \text{ m}$; $\sphericalangle EBA = 37,89^\circ$] 2 P
- A 2.3 Ermitteln Sie durch Rechnung den Radius r des Kreisbogens DC.
[Ergebnis: $r = 19,40 \text{ m}$] 3 P
- A 2.4 Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt A des Parkgrundstücks ABCDE.
[Zwischenergebnis: $\sphericalangle EMB = 132,21^\circ$] 4 P
- A 2.5 Der Kreisbogen DC ist die Grundstücksgrenze zu einem stark befahrenen Kreisverkehr. Zum Schutz gegen den Lärm wird ein an den Kreisbogen DC angrenzender Grüngürtel mit Bäumen und Sträuchern bepflanzt. Der Kreisbogen GH mit $G \in [ED]$ und $H \in [BC]$ begrenzt diesen Grüngürtel zum Grundstücksinneren hin. Er berührt die Strecke [EB] im Punkt K und hat mit dem Kreisbogen DC den Mittelpunkt M gemeinsam.
Zeichnen Sie den Kreisbogen GH in die Zeichnung zu 2.1 ein.
Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Grüngürtels. 4 P

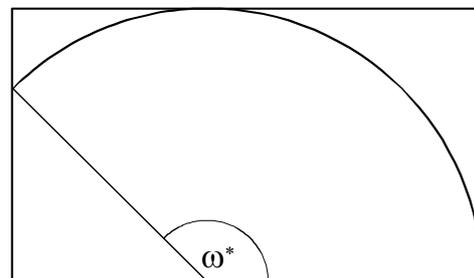
Mathematik II

Aufgabengruppe A

Aufgabe A 3

- A 3.0 Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basislänge $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$ und dem Winkel ACB mit dem Maß 40° .
- A 3.1 Zeichnen Sie das Dreieck ABC und seinen Inkreis mit dem Mittelpunkt M im Maßstab 3 : 1. 2 P
- A 3.2 Der Punkt D ist der Mittelpunkt der Basis [AB]. Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet die Höhe [DC], die Länge der Seite [AC] und den Inkreisradius r_i .
[Ergebnisse: $\overline{DC} = 4,12 \text{ cm}$; $\overline{AC} = 4,39 \text{ cm}$; $r_i = 1,05 \text{ cm}$] 3 P
- A 3.3 Das gleichschenklige Dreieck ABC ist der Axialschnitt eines Kegels, der die Grundform einer neuen Pralinsorte beschreibt. Im Inneren der Praline befindet sich eine Knusperkugel. Im Axialschnitt fällt der Mittelpunkt der Knusperkugel mit dem Inkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC zusammen. Der Radius r_K der Knusperkugel ist um 1,5 mm kleiner als der Inkreisradius r_i . Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens der Knusperkugel am Gesamtvolumen der Praline. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) 4 P
- A 3.4 Die Punkte $P \in [AC]$ und $Q \in [BC]$ sind jeweils 1,5 cm von der Pralinspitze C entfernt. Ergänzen Sie die Zeichnung in 3.1 durch das Dreieck PQC und berechnen Sie die Länge der Strecke [PQ] auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $\overline{PQ} = 1,03 \text{ cm}$] 2 P
- A 3.5 Der obere Teil der Praline mit dem Axialschnitt PQC soll mit einer kreissectorförmigen Goldfolie vollständig bedeckt werden. Berechnen Sie das Mindestmaß ω des Mittelpunktswinkels dieses Kreissektors auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. 1 P

- A 3.6 Zum Einwickeln des oberen Teils der Praline aus 3.5 wird aus einem rechteckigen Folienstück mit einer Breite von 1,5 cm ein Kreissektor herausgeschnitten (siehe Skizze). Aus praktischen Gründen wird dafür ein Mittelpunktswinkel mit dem Maß $\omega^* = 135^\circ$ gewählt.



Zeichnen Sie den Kreissektor und das zugehörige rechteckige Folienstück im Maßstab 3 : 1.

Berechnen Sie sodann die Länge ℓ dieses Folienstücks auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. 4 P

Mathematik II

Aufgabengruppe B

Aufgabe B 1

B 1.0 Die Parabel p_0 hat die Gleichung $y = 0,5x^2$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sie wird durch Parallelverschiebung mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf die Parabel p abgebildet.

B 1.1 Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Gleichung der Parabel p wie folgt darstellen lässt: $p: y = 0,5x^2 - 3x + 2,5$.

Zeichnen Sie sodann die Parabel p im Bereich von $-2 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem ein.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leq x \leq 9$; $-3 \leq y \leq 12$

3 P

B 1.2 Punkte $B_n(x | 0,5x^2 - 3x + 2,5)$ mit $x < 3$ und Punkte D_n liegen auf der Parabel p und sind zusammen mit den Punkten $A(3 | 10)$ und $C(3 | -2)$ Eckpunkte von Drachenvierecken AB_nCD_n mit der gemeinsamen Symmetrieachse AC .
Zeichnen Sie die Drachenvierecke AB_1CD_1 für $x = -1$ und AB_2CD_2 für $x = 1$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

2 P

B 1.3 Bestimmen Sie durch Rechnung den Wert für die Abszisse x des Punktes B_0 , für den man kein Drachenviereck, sondern das gleichschenklige Dreieck B_0CD_0 erhält. (Auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.)

2 P

B 1.4 Geben Sie die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n an.

2 P

B 1.5 Unter den Drachenvierecken AB_nCD_n gibt es eine Raute AB_3CD_3 .

Zeichnen Sie diese Raute in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Berechnen Sie sodann die x -Koordinate des Punktes B_3 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

[Teilergebnis: $x_{B_3} = -0,46$]

4 P

B 1.6 Berechnen Sie die Seitenlänge der Raute AB_3CD_3 sowie das Maß β_3 des Winkels CB_3A . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

3 P

Mathematik II

Aufgabengruppe B

Aufgabe B 2

B 2.0 Nebenstehende Skizze zeigt den Plan der Trittfläche einer Wendeltreppe. Die Trittfläche ABCD hat die Form eines Vierecks.

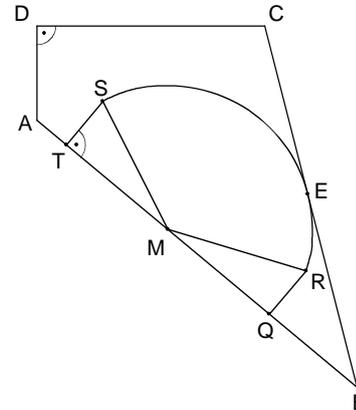
Es gelten folgende Maße:

$$\overline{AB} = 110,0 \text{ cm}; \quad \overline{CD} = 60,0 \text{ cm}; \quad \overline{AD} = 25,0 \text{ cm};$$

$$\sphericalangle BAD = 130,0^\circ; \quad \sphericalangle ADC = 90,0^\circ.$$

Hinweis für Berechnungen:

Runden Sie jeweils auf eine Stelle nach dem Komma: Winkelmaße in $^\circ$, Längen in cm und Flächeninhalte in cm^2 .



B 2.1 Zeichnen Sie das Viereck ABCD im Maßstab 1 : 10 und berechnen Sie sodann die Länge der Strecke [AC].

[Teilergebnis: $\overline{AC} = 65,0 \text{ cm}$]

2 P

B 2.2 Ermitteln Sie rechnerisch den Flächeninhalt A_T der Trittfläche ABCD.

[Zwischenergebnis: $\sphericalangle BAC = 62,6^\circ$; Ergebnis: $A_T = 3923,9 \text{ cm}^2$]

3 P

B 2.3 Aus Sicherheitsgründen wird die Trittfläche ABCD mit einer rutschfesten Auflage belegt. Die Seite [QT] der Auflage mit dem Mittelpunkt M liegt auf der Treppenkante [AB] und es gilt: $\overline{AM} = 45,0 \text{ cm}$.

Die Auflageform setzt sich aus zwei kongruenten, rechtwinkligen Dreiecken MQR und MST mit $\overline{QR} = \overline{ST} = 15,0 \text{ cm}$ und dem Kissektor MRS zusammen. Der Kreisbogen RS berührt die Treppenkante [BC] im Punkt E.

Zeichnen Sie die Teildreiecke und den Kissektor in die Zeichnung zu 2.1 ein.

2 P

B 2.4 Berechnen Sie den Radius r des Kissektors MRS.

[Ergebnis: $r = 38,0 \text{ cm}$]

3 P

B 2.5 Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt A der rutschfesten Auflage und berechnen Sie sodann, wie viel Prozent der Trittfläche von der Auflage bedeckt wird.

5 P

Mathematik II

Aufgabengruppe B

Aufgabe B 3

B 3.0 Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis [BC] ist die Grundfläche des geraden Prismas ABCDEF mit der Höhe 10 cm. M ist der Mittelpunkt von [BC] und N der Mittelpunkt von [EF].

Es gilt: $\overline{AM} = 9 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 10 \text{ cm}$ und $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = 10 \text{ cm}$

B 3.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild des Prismas ABCDEF, wobei [AM] auf der Schrägbildachse liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 60^\circ$

2 P

B 3.2 Berechnen Sie das Maß α des Winkels MAN und die Länge der Strecke [AN] auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

[Teilergebnis: $\alpha = 48,01^\circ$]

2 P

B 3.3 Punkte $P_n \in [CF]$, $Q_n \in [BE]$ und $S_n \in [AN]$ sind zusammen mit den Punkten B und C Eckpunkte von Pyramiden $BCP_nQ_nS_n$ mit den Spitzen S_n .

Es gilt: $d(S_n; AM) = \overline{FP_n} = \overline{EQ_n} = x \text{ cm}$ ($0 < x < 10$; $x \in \mathbb{R}$)

Zeichnen Sie die Pyramide $BCP_1Q_1S_1$ für $x = 3$ in das Schrägbild zu 3.1 ein und berechnen Sie sodann die Längen der Strecken [AS₁] und [MS₁]. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

[Teilergebnis: $\overline{AS_1} = 4,04 \text{ cm}$]

4 P

B 3.4 Zeigen Sie rechnerisch, dass für das Volumen V der Pyramiden $BCP_nQ_nS_n$ in Abhängigkeit von x gilt: $V(x) = (3x^2 - 60x + 300) \text{ cm}^3$.

4 P

B 3.5 Das Volumen der Pyramide $BCP_2Q_2S_2$ ist um 75% kleiner als das Volumen des Prismas ABCDEF.

Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

4 P

Mathematik II

Aufgabengruppe C

Aufgabe C 1

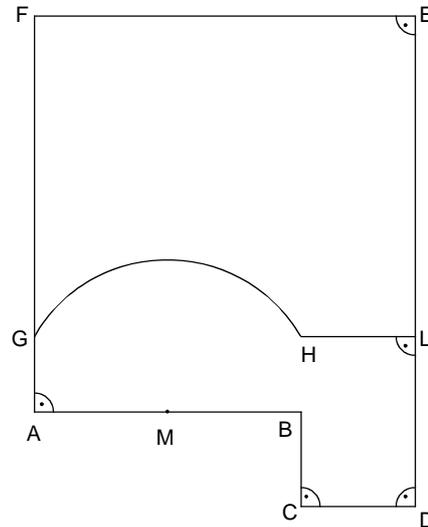
- C 1.0 Die Parabel p hat eine Gleichung der Form $y = 0,25x^2 + bx + c$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(1|11,25)$ und $Q(8|6)$. Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 2$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- C 1.1 Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c , dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,25x^2 - 3x + 14$ hat.
Ermitteln Sie sodann die Koordinaten des Scheitels S der Parabel p .
Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g im Bereich von $1 \leq x \leq 11$ in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leq x \leq 13$; $-4 \leq y \leq 12$ 5 P
- C 1.2 Punkte A_n auf der Geraden g und Punkte C_n auf der Parabel p haben jeweils dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten B_n und D_n Eckpunkte von Rauten $A_n B_n C_n D_n$. Für alle Rauten gilt: $\overline{B_n D_n} = 6 \text{ LE}$.
Zeichnen Sie die Rauten $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = 2$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 9$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein. 2 P
- C 1.3 Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Diagonalenlänge $\overline{A_n C_n}$ aller Rauten $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und C_n wie folgt darstellen lässt: $\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12) \text{ LE}$. 1 P
- C 1.4 Die Raute $A_0 B_0 C_0 D_0$ besitzt den kleinstmöglichen Flächeninhalt A_{\min} .
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x und den Flächeninhalt A_{\min} . 3 P
- C 1.5 Unter den Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gibt es zwei Quadrate $A_3 B_3 C_3 D_3$ und $A_4 B_4 C_4 D_4$.
Berechnen Sie die zugehörigen Werte für x . 3 P
- C 1.6 Unter den Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gibt es zwei Rauten $A_5 B_5 C_5 D_5$ und $A_6 B_6 C_6 D_6$ mit der Diagonalenlänge $\overline{A_5 C_5} = 7 \text{ LE}$ bzw. $\overline{A_6 C_6} = 7 \text{ LE}$.
Zeichnen Sie die Diagonalen $[A_5 C_5]$ und $[A_6 C_6]$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und geben Sie die Gleichung der Geraden $C_5 C_6$ an. 2 P

Mathematik II

Aufgabengruppe C

Aufgabe C 2

C 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt den Plan des Gartengrundstücks eines Reihenhauses. Eine geplante Terrasse wird von den Strecken $[GA]$, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DL]$, $[LH]$ mit $L \in [DE]$ und $G \in [AF]$ und dem Kreisbogen HG begrenzt. Dabei ist der Mittelpunkt M der Strecke $[AB]$ auch der Mittelpunkt des zum Kreisbogen HG gehörenden Kreises.



Es gelten folgende Maße:

$$\overline{AB} = 7,00 \text{ m}; \overline{BC} = 2,50 \text{ m}; \overline{CD} = 3,00 \text{ m};$$

$$\overline{DE} = 13,00 \text{ m}; \overline{DL} = 4,50 \text{ m}; \overline{AG} = 2,00 \text{ m}.$$

Hinweis für Berechnungen:

Runden Sie jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma: Winkelmaße in $^\circ$, Längen in m und Flächeninhalte in m^2 .

C 2.1 Zeichnen Sie das sechseckige Grundstück $ABCDEF$ mit den Terrassengrenzen im Maßstab 1 : 100. 2 P

C 2.2 Die Terrassenoberfläche soll mit Fliesen versiegelt werden. Der Bebauungsplan der Gemeinde schreibt vor, dass im Gartengrundstück der Anteil der versiegelten Oberfläche höchstens 34% der gesamten Gartenfläche betragen darf. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Terrasse und prüfen Sie, ob die Vorschriften des Bebauungsplans eingehalten werden, wenn die Terrassenoberfläche durch Fliesen versiegelt wird.

[Teilergebnisse: $\sphericalangle GMA = 29,74^\circ$; $\overline{GM} = \overline{HM} = 4,03 \text{ m}$]

5 P

C 2.3 Ein Teich ist in der Form eines Kreissektors geplant. Hierzu wird ein Kreis k mit dem Radius 4,00 m um den Mittelpunkt L gezogen, der $[LE]$ in P und HG in Q schneidet. Ferner wird von M nach L ein Rohr verlegt, das die Versorgungsleitungen für den Teich aufnehmen kann. Zeichnen Sie die Strecke $[ML]$ und den Kreissektor LPQ in die Zeichnung zu 2.1 ein. Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[ML]$ und den Flächeninhalt des Kreissektors LPQ .

[Teilergebnis: $\overline{ML} = 6,80 \text{ m}$; $\sphericalangle QLM = 32,27^\circ$]

4 P

C 2.4 Die von den Strecken $[QL]$, $[LH]$ und dem Kreisbogen HQ begrenzte Fläche zwischen Teich und Terrasse soll mit Kies bedeckt werden.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der mit Kies bedeckten Fläche.

4 P

Mathematik II

Aufgabengruppe C

Aufgabe C 3

C 3.0 Das gleichschenklige Trapez ABCD mit den Grundseiten [AB] und [CD] ist die Grundfläche der Pyramide ABCDS. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt E der Seite [AB]. F ist der Mittelpunkt der Seite [CD].

Es gilt: $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 8 \text{ cm}$, $\overline{EF} = 6 \text{ cm}$, $\overline{ES} = 7 \text{ cm}$

C 3.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Symmetrieachse EF der Grundfläche ABCD auf der Schrägbildachse liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$

2 P

C 3.2 Berechnen Sie das Maß ε des Winkels SFE, den die Seitenfläche CDS mit der Grundfläche einschließt, und die Länge der Strecke [FS] auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

[Ergebnisse: $\varepsilon = 49,40^\circ$; $\overline{FS} = 9,22 \text{ cm}$]

2 P

C 3.3 Auf der Strecke [FS] liegen Punkte P_n mit $\overline{FP_n} = x \text{ cm}$ und $x < 9,22$; $x \in \mathbb{R}_0^+$. Parallelen zur Seite [CD] durch die Punkte P_n schneiden die Seitenkanten [CS] in Q_n und [DS] in R_n . Die Punkte Q_n und R_n sind zusammen mit A und B Eckpunkte von Trapezen ABQ_nR_n .

Zeichnen Sie das Trapez ABQ_1R_1 für $x = 2$ in das Schrägbild zu 3.1 ein.

Berechnen Sie sodann das Maß δ_1 des Winkels FEP_1 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

[Teilergebnis: $\delta_1 = 17,90^\circ$]

3 P

C 3.4 Berechnen Sie die Länge der Höhe $[EP_n]$ der Trapeze ABQ_nR_n in Abhängigkeit von x .

Ermitteln Sie sodann die kleinste Länge $\overline{EP_0}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

[Teilergebnis: $\overline{EP_n}(x) = \sqrt{x^2 - 7,81x + 36} \text{ cm}$]

3 P

C 3.5 Zeigen Sie, dass für die Längen der Strecken $[Q_nR_n]$ in Abhängigkeit von x gilt:

$$\overline{Q_nR_n}(x) = (8 - 0,87x) \text{ cm}.$$

Berechnen Sie sodann auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, für welche

Belegung von x gilt: $\overline{Q_nR_n}(x) = 3 \text{ cm}$.

3 P

C 3.6 Das Trapez ABQ_1R_1 ist die Grundfläche einer zweiten Pyramide ABQ_1R_1S .

Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

3 P