Abschlussprüfung 2001

an den Realschulen in Bayern

Mathematik II — Aufgabengruppe A

1.0 Die Parabel p hat eine Gleichung der Form $y = a \cdot (x - 8)^2 + 10$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Parabel p verläuft durch den Punkt $P(2 \mid 5{,}5)$.

1.1 Berechnen Sie den Wert für a und zeigen Sie, dass sich die Gleichung der Parabel p wie folgt darstellen lässt: $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2x + 2$.
Erstellen Sie sodann für die Parabel p eine Wertetabelle für $x \in [0; 11]$ in Schritten von $\Delta x = 1$, und zeichnen Sie p in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leqq x \leqq 12$; $-1 \leqq y \leqq 11$

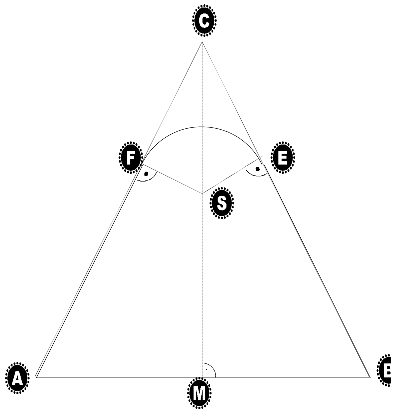
1.2 Auf der Parabel p liegen Punkte $A_n(x \mid -\frac{1}{8}x^2 + 2x + 2)$ und Punkte D_n. Dabei ist die Abszisse der Punkte D_n jeweils um 4 größer als die Abszisse x der Punkte A_n.
Zeigen Sie, dass für die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $D_n\,(x + 4 \mid -\frac{1}{8}x^2 + x + 8)$.

1.3 Für $x < 6$ und $x \in \mathbb{R}$ sind die Strecken $[A_nD_n]$ die Hypotenusen von rechtwinkligen Dreiecken $A_nF_nD_n$, deren Katheten $[A_nF_n]$ parallel zur x-Achse und deren Katheten $[D_nF_n]$ parallel zur y-Achse verlaufen. An die Katheten $[D_nF_n]$ der Dreiecke $A_nF_nD_n$, werden jeweils Quadrate $D_nF_nB_nC_n$ mit $\overline{D_nF_n}$ als Seitenlänge angefügt. Die Quadrate $D_nF_nB_nC_n$ bilden zusammen mit den Dreiecken $A_nF_nD_n$ Trapeze $A_nB_nC_nD_n$.
Zeichnen Sie das Dreieck $A_1F_1D_1$ für $x = 0$ und das zugehörige Quadrat $D_1F_1B_1C_1$, sowie das Dreieck $A_2F_2D_2$ für $x = 5$ und das zugehörige Quadrat $D_2F_2B_2C_2$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein, so dass die Trapeze $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ entstehen.

1.4 Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{D_nF_n}(x)$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A.
Zeigen Sie sodann rechnerisch, dass die x-Koordinate der Punkte C_n stets 10 ist.
[Teilergebnis: $\overline{D_nF_n}(x) = (6 - x)$ LE]

1.5 Bestimmen Sie den Flächeninhalt A(x) der Trapeze $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n. Berechnen Sie sodann den Wert für x, so dass das zugehörige Trapez $A_3B_3C_3D_3$ einen Flächeninhalt von 80 FE hat.
[Teilergebnis: $A(x) = (x^2 - 14x + 48)$ FE]

2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt den Entwurf für ein Glasfenster, das von den Strecken [FA], [AB], [BE] und dem Kreisbogen $\overset{\frown}{EF}$ begrenzt wird. Das gleichschenklige Dreieck ABC hat die Basislänge $\overline{AB} = 100$ cm und die Höhe $\overline{CM} = 100$ cm. Der Kreisbogen $\overset{\frown}{EF}$ ist Teil des Kreises mit dem Mittelpunkt S auf [MC] und dem Radius 20 cm.



Bitte wenden!

2.1 Zeichnen Sie das Fenster im Maßstab 1: 10.
Berechnen Sie das Maß ε des Winkels ACM auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{FC}$. (Auf ganze Zentimeter runden.)
[Teilergebnis: $\varepsilon = 26{,}57°$; $\overline{FC} = 40$ cm]

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fensters. (Auf ganze Quadratzentimeter runden.)
[Ergebnis: $A_{\text{Fenster}} = 4643$ cm²]

2.3 Das Fenster wird mit Blei eingefasst. Berechnen Sie die Länge des benötigten Bleibandes. (Auf ganze Zentimeter runden.)

2.4 Das Fenster soll in verschiedenfarbige Glasflächen unterteilt werden. Dabei sind die Strecken [ME] und [MF] Begrenzungslinien.
Zeichnen Sie die Strecken [ME] und [MF] in die Zeichnung zu 2.1 ein und berechnen Sie deren Länge auf ganze Zentimeter gerundet.

2.5 Zwei weitere Begrenzungslinien [MG] und [MH] mit G auf [BC] und H auf [AC] sind jeweils 52 cm lang.
Zeichnen Sie die Strecken [MG] und [MH] in die Zeichnung zu 2.1 ein, und berechnen Sie den Flächeninhalt des dreieckigen Glasteiles AMH. (Winkelmaße auf zwei Stellen nach dem Komma und Flächeninhalte auf ganze Quadratzentimeter runden.) [Teilergebnis: $\sphericalangle HMA = 57{,}25°$ 1

3..0 Das Rechteck ABCD hat die Seitenlängen $\overline{AB} = 8$ cm und $\overline{BC} = 3$ cm. Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Seite [AB], der Punkt F ist der Mittelpunkt der Seite [DC]. Die Seite [DC] ist die Basis des gleichschenkligen Dreiecks DCS mit der Höhe $\overline{FS} = 3$ cm. Das Rechteck ABCD und das Dreieck DCS bilden zusammen das Fünfeck ABCSD.

3.1 Zeichnen Sie das Fünfeck ABCSD. Berechnen Sie sodann das Maß φ des Winkels FSC auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet sowie die Länge der Seite [SC].
[Teilergebnis: $\overline{SC} = 5$ cm]

3.2 Das Viereck EBCS rotiert um ES als Rotationsachse. Bestätigen Sie durch Rechnung, dass das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers 64π cm² beträgt.

3.3 Auf der Seite [SC] des Fünfecks ABCSD liegen Punkte P_n mit $\overline{CP_n} = x$ cm ($x < 5$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$). Bei der Rotation um ES als Rotationsachse erzeugen die Dreiecke EP_nS Doppelkegel, die aus zwei Kegeln mit dem Grundkreisradius $r = \overline{P_nH_n}$ mit $H_n \in [FS]$ zusammengesetzt sind. Zeichnen Sie den Punkt P_1 für $x = 3$ sowie die Strecken $[P_1E]$ und $[P_1H_1]$ in die Zeichnung zu 3.1 ein. Zeigen Sie rechnerisch, dass für das Volumen V(x) der Doppelkegel in Abhängigkeit von x gilt: $V(x) = 2\pi \cdot (0{,}64x^2 - 6{,}4x + 16)$ cm³.

3.4 Berechnen Sie den Wert für x, so dass das Volumen V des zugehörigen Doppelkegels 28% des Volumens des Rotationskörpers von 3.2 hat.
(Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Abschlussprüfung 2001

an den Realschulen in Bayern

Mathematik II — Aufgabengruppe B

1.0 Gegeben ist die Parabel p_1 mit der Gleichung $y = 0{,}25x^2 - x + 2$. Es gilt: $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Scheitels S_1 der Parabel p_1. Erstellen Sie für die Parabel p_1 eine Wertetabelle für $x \in [-3; 7]$ in Schritten von $\Delta x = 1$ und zeichnen Sie die Parabel p_1 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leqq x \leqq 10$; $-4 \leqq y \leqq 8$

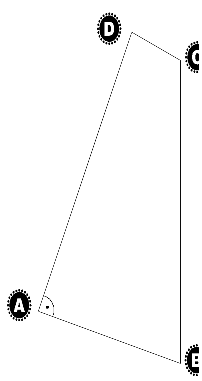
1.2 Die Parabel P_2 erhält man durch Parallelverschiebung der Parabel p_1 mit dem Vektor
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Geben Sie die Koordinaten des Scheitels S_2 der Parabel P_2 an und zeigen Sie rechnerisch, dass die Parabel P_2 die Gleichung $y = 0{,}25\,x^2 - 2x + 1$ hat. Zeichnen Sie die Parabel P_2 im Bereich $-1 \leqq x \leqq 9$ in das Koordinatensystem zu 1. 1 ein.

1.3 Die Punkte $Q_n(x|0{,}25x^2 - x + 2)$ auf der Parabel p_1 und die Punkte $R_n(x|0{,}25x^2 - 2x + 1)$ auf der Parabel P_2 haben dieselbe Abszisse x. Der Punkt $P(6 \mid -1)$ und die Punkte Q_n und R_n sind für $x \in [-1; 6]$ und $x \in \mathbb{R}$ die Eckpunkte von Dreiecken PQ_nR_n.
Zeichnen Sie das Dreieck PQ_1R_1 für $x = 1$ und das Dreieck PQ_2R_2 für $x = 4{,}5$ in das Koordinatensystem zu 1. 1 ein.

1.4 Überprüfen Sie durch Rechnung, ob die Gerade PQ_1 eine Tangente an die Parabel p_1 ist.
[Teilergebnis: PQ_1 mit $y = -0{,}45x + 1{,}7$]

1.5 Zeigen Sie rechnerisch, dass für den Flächeninhalt A(x) der Dreiecke PQ_nR_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte Q_n gilt: $A(x) = (-0{,}5x^2 + 2{,}5x + 3)$ FE.
Unter den Dreiecken PQ_nR_n besitzt das Dreieck PQ_0R_0 den größtmöglichen Flächeninhalt A_{max}. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x und geben Sie A_{max} an.

2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt die Grundform eines Surfsegels. Für die Maße des Segels gilt: $\overline{BC} = 4{,}00$ m; $\overline{CD} = 0{,}75$ m; $\sphericalangle CBA = 70°$; $\sphericalangle DCB = 120°$; $\sphericalangle BAD$ 90°.



2.1 Zeichnen Sie das Viereck ABCD im Maßstab 1:50 und berechnen Sie die Länge der Strecke [BD] auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $\overline{BD} = 4{,}42$ m]

2.2 Berechnen Sie das Maß des Winkels CBD, die Länge der Strecke [AB] und sodann den Flächeninhalt A_{ABCD} des Vierecks ABCD. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Teilergebnis: $\sphericalangle CBD = 8{,}45°$; $\overline{AB} = 2{,}11$ m]

Bitte wenden!

2.3 Zur Erhöhung der Stabilität der Segelfläche sind mehrere Verstärkungen angebracht. Eine davon verläuft geradlinig zwischen den Punkten E und F. Dabei liegt der Punkt E auf [AD] mit $\overline{AE} = 1{,}25$ m und der Punkt F auf [BC]. Es gilt [EF] ∥ [AB].
Zeichnen Sie die Strecke [EF] in die Zeichnung zu 2.1 ein und berechnen Sie ihre Länge $\overline{EF}$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

2.4 Das Surfsegel wird an der Ecke A durch den Kreisbogen $\overset{\frown}{EG}$ abgerundet. Dieser Kreisbogen $\overset{\frown}{EG}$, der die Strecke [AD] im Punkt E und die Strecke [AB] im Punkt G berührt, ist Teil eines Kreises, dessen Mittelpunkt M auf der Strecke [EF] liegt.
Zeichnen Sie den Mittelpunkt M und den Kreisbogen $\overset{\frown}{EG}$ in die Zeichnung zu 2.1 ein. Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, um wie viele Quadratmeter sich die Segelfläche verkleinert, wenn das von den Strecken [EA] und [AG] sowie vom Kreisbogen $\overset{\frown}{EG}$ begrenzte Flächenstück abgeschnitten wird.

3.0 Das Drachenviereck ABCD mit AC als Symmetrieachse ist die Grundfläche der Pyramide ABCDS. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M der Grundfläche und es gilt:
$\overline{AC} = 12$ cm, $\overline{BD} = 10$ cm, $\overline{AM} = 3$ cm und $\overline{MS} = 7$ cm.

3.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei [AC] auf der Schrägbildachse liegen soll.
Für die Zeichnung: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$
Berechnen Sie sodann das Maß ε des Winkels SCA und die Länge der Strecke [SC] jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $\varepsilon = 37{,}87°$]

3.2 Für die Punkte P_n auf [SC] gilt $\overline{SP_n} = x$ cm und für die Punkte Q_n auf [BD] gilt: $\overline{DQ_n} = x$ cm mit $x < 10$ und $x \in \mathbb{R}^+$.
Die Punkte B, C und Q_n sind die Eckpunkte der Grundflächen von Pyramiden BCQ_nP_n mit den Spitzen P_n.
Zeichnen Sie die Pyramide BCQ_1P_1 für $x = 2$ und die zugehörige Höhe $[F_1P_1]$ mit F_1 auf [MC] in das Schrägbild zu 3.1 ein.

3.3 Berechnen Sie das Volumen V(x) der Pyramiden BCQ_nP_n in Abhängigkeit von x. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Ergebnis: $V(x) = (0{,}92x^2 - 19{,}65x + 105{,}00)\ \text{cm}^3$]

3.4 Das Volumen der Pyramide BCQ_2P_2 beträgt 30% des Volumens der Pyramide ABCDS. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.